انتشارات بین المللی گاج

تألیف جدید

ریاضی تیزهوشان ۹ نهم

درسنامه‌های کامل | تست‌های فراوان | پاسخ‌های روان

مؤلّفان: علی‌اصغر حیدری • مجتبی عارف‌نسب

ویژه آزمون ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه دولتی

موفقیت،
به همین راحتی به
دست نمیاد...
شاید بهترین راهش
داشتن یه آی کیو
خوب توی قرن جدید
باشه...

نسل جدید کتاب های تیزهوشان
تا آخرش همراهت هست

نسل قدیم

نسل جدید

ریاضی تیزهوشان نهم

گاجینو
gajino.com
آموزش آنلاین

گاج مارکت
gajmarket.com
فروشگاه آنلاین

دکتر آی کیو
DRIQ.com
کلاس آنلاین

9 786220 308782

مقدمه

دوست عزیز من سلام

از اینکه به ما اعتماد کردید و کتاب ریاضی IQ را برای مطالعه بیشتر در مدارس تیزهوشان یا آمادگی جهت شرکت در آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و نمونه دولتی انتخاب کرده‌اید از شما سپاسگزاریم.

عزیزان این کتاب نتیجه ۲۲ سال تدریس در مدارس تیزهوشان و یا مدارس و آموزشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد. از آنجا که دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان جهت مطالعه عمیق‌تر و همچنین آماده شدن برای آزمون‌های پایش نیاز به یک منبع علمی مناسب دارند و از طرفی دانش‌آموزان مدارس دیگر که قصد شرکت در آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و یا مدارس خاص دیگری را دارند نیاز به کتابی جامع از نظر درسنامه و همچنین پوشش کامل سؤالات دارند، تصمیم گرفتیم تا این کتاب را به رشته تحریر در آوریم و در اختیار شما عزیزان قرار دهیم.

در هر فصل این کتاب با توجه به درس‌های مربوطه، درسنامه جامع و کاملی آماده شده است که شامل نکات و مثال‌های کاربردی می‌باشد و با مطالعه آنها مطالب را به خوبی خواهید آموخت. در ضمن این درسنامه‌ها در کلاس‌های تیزهوشان باعث صرفه‌جویی در زمان کلاس خواهند شد، زیرا دیگر نیاز به یادداشت‌برداری نکات و سؤالات نمی‌باشد و به جای آن می‌توانید از این زمان برای تحلیل بیشتر مطالب و درک عمیق‌تر آنها استفاده کنید.

در بخش تستی هر درس، پرسش‌های آزمون‌های ورودی سال‌های قبل به همراه پرسش‌های آزمون‌های پایش مدارس تیزهوشان (این آزمون سالانه دو مرتبه جهت سنجش وضعیت درسی دانش‌آموزان مدارس تیزهوشان در کل کشور به طور همزمان برگزار می‌شود) آورده شده، پس شما دانش‌آموز خوب مدرسه تیزهوشان جهت آماده شدن برای آزمون‌های پایش می‌توانید این سؤالات را حل کرده و تحلیل نمایید. در ضمن دانش‌آموزان دیگر هم می‌توانند با حل آنها با سؤالات احتمالی در آزمون تیزهوشان و یا نمونه دولتی هم آشنا شوند.

در پایان هم چند مرحله آزمون ورودی مدارس خاص ارائه شده است. پیشنهاد می کنیم ابتدابه سؤالات آنها پاسخ دهید و سپس به مطالعه پاسخنامه بپردازید.

علی‌اصغر حیدری، مجتبی عارف‌نسب

فهرست

فصل ۱: مجموعه‌ها ۵

فصل ۲: عددهای حقیقی ۳۷

فصل ۳: استدلال و اثبات در هندسه ۵۹

فصل ۴: توان و ریشه ۹۷

فصل ۵: عبارت‌های جبری ۱۲۹

فصل ۶: خط و معادله‌های خطی ۱۵۹

فصل ۷: عبارت‌های گویا ۱۸۹

فصل ۸: حجم و مساحت ۲۰۷

آزمون‌ها ۲۳۳

پاسخنامه ۲۴۷

فصل ۱: مجموعه‌ها

۱ معرفی مجموعه ..... صفحه ۶

معرفی مجموعه

عدد اصلی مجموعه

نمودار وِن

سؤالات پرتکرار و رایج درس اول

۲ مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها ..... صفحه ۱۰

مجموعه‌های برابر

زیرمجموعه

نمایش مجموعه‌ها از زبان ریاضی به مجموعه‌های عددی

نمایش مجموعه‌های اعداد به زبان ریاضی

سؤالات پرتکرار و رایج درس دوم

۳ اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها ..... صفحه ۲۰

اجتماع و اشتراک دو مجموعه

تفاضل دو مجموعه

سؤالات پرتکرار و رایج درس سوم

۴ مجموعه‌ها و احتمال ..... صفحه ۳۰

محاسبهٔ احتمال

پیشامد متمم

احتمال غیرهم‌شانس

سؤالات پرتکرار و رایج درس چهارم

پاسخنامه ..... صفحه ۲۴۷

جلسه صفر: مقدمه

جلسه اول: معرفی مجموعه- مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

جلسه دوم: زیرمجموعه، نمایش مجموعه‌های اعداد - اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

جلسه سوم: ادامهٔ اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها - مجموعه‌ها و احتمال

درس اول: معرفی مجموعه

معرفی مجموعه

مجموعه: در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای کاملاً مشخص (یعنی اعضا سلیقه‌ای انتخاب نشوند و کاملاً معین باشند) و دو به دو متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌شود.

کدام عبارت، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟ (آزمون ورودی)

۱) چهار عدد فرد متوالی
۲) پنج عدد بزرگ‌تر از ۱۰۰
۳) سه شهر ایران
۴) یک عدد اول زوج

گزینهٔ «۴»؛ گفتیم که عضوهای مجموعه باید کاملاً معین باشند و نباید به‌صورت سلیقه‌ای نوشته شوند. در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» هر شخصی می‌تواند با توجه به سلیقهٔ خود پاسخ بدهد؛ ولی در گزینهٔ «۴» با توجه به اینکه عدد ۲ تنها عدد اول زوج است، پس این عبارت مجموعه {۲} را تشکیل می‌دهد.

مجموعهٔ اعداد صحیح بین $\sqrt{13}-13$ و $\sqrt{17}-17$ کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) $\{-11, -10, \cdots, 8\}$
۲) $\{-12, -11, -10, \cdots, 9\}$
۳) $\{-13, -12, \cdots, 9\}$
۴) $\{-13, -12, \cdots, 10\}$

گزینهٔ «۲» عددی بین ۹ و ۱۰ است. $\Rightarrow 10 < \sqrt{13}-13 < 9 \Rightarrow 13-3 < 13-\sqrt{13} < 13-4 \Rightarrow -3 > -\sqrt{13} > -4$

عددی بین ۱۲- و ۱۳- است. $\Rightarrow -12 > -17+\sqrt{17} > -13 \Rightarrow -17+5 > -17+\sqrt{17} > -17+4 \Rightarrow 5 > \sqrt{17} > 4$

بنابراین کافی است مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۱۰+ و ۱۳- را بنویسیم: $\{-12, -11, -10, \cdots, 9\}$

نکته

- گاهی یک مجموعه مانند $\{1, 2\}$، می‌تواند عضو مجموعهٔ دیگری مانند $A = \{3, \{1, 2\}\}$ باشد؛ دقت کنید در مجموعهٔ A داریم:
  $1 \notin A$ و $2 \notin A$ ولی $3 \in A$ و $\{1, 2\} \in A$.

با توجه به مجموعهٔ روبه‌رو کدام عبارت نادرست است؟ $A = \{2, \{1\}, 0, 12\}$

۱) $1 \in A$
۲) $12 \in A$
۳) $0 \in A$
۴) $2 \in A$

گزینهٔ «۱»؛ مجموعهٔ A شامل ۴ عضو است که عبارت‌اند از ۲، {۱}، ۰ و ۱۲ بنابراین $1 \notin A$.

نکته

- در هر مجموعه اعضا باید دو به دو متمایز باشند، لذا در هر مجموعه عضو تکراری بی‌تأثیر است.
- در هر مجموعه، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه مهم نیست و با جابه‌جا کردن عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدید به وجود نمی‌آید.

مجموعهٔ $\{x, \{x\}, \{x, x\}, \{x, x, x\}, \cdots\}$ چند عضو دارد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) نمی‌توان مشخص کرد.

گزینهٔ «۲»؛ می‌دانیم که عضوهای هر مجموعه باید متمایز باشند، پس می‌توانیم عضوهای تکراری را حذف کنیم. به این ترتیب خواهیم داشت: $A = \{x, \{x\}, \{x, \cancel{x}\}, \{x, \cancel{x}, \cancel{x}\}, \cdots\} = \{x, \{x\}, \cancel{\{x\}}, \cancel{\{x\}}, \cdots\} = \{x, \{x\}\}$

پس مجموعهٔ A دارای ۲ عضو است.

مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نام دارد که آن را با نماد { } یا ∅ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که مجموعه‌های {۰}، {∅} یا {{ }} تهی نیستند.

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟ (آزمون ورودی)

۱) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۸ که مکعب کامل باشند.

۲) اعداد صحیح غیرمثبتی که مربعشان با خودشان برابر باشد.

۳) اعداد طبیعی که مربعشان کوچک‌تر از خودشان باشد.

۴) اعداد اول بین ۱۹ و ۲۹

گزینهٔ «۳»؛ بررسی گزینه‌ها:

۱) عدد ۱ مکعب کامل و کوچک‌تر از ۸ است، بنابراین این مجموعه به صورت $\{۱^۳\} = \{۱\}$ است.

۲) عددهای صحیح غیرمثبت عبارت‌اند از: ۰، ۱-، ۲-، ۳- و ... پس این مجموعه به صورت $\{۰^۲\} = \{۰\}$ است.

۳) مربع هر عدد طبیعی، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است، پس این مجموعه به صورت تهی است.

۴) عدد ۲۳ تنها عدد اول بین ۱۹ و ۲۹ است، پس این مجموعه به صورت $\{۲۳\}$ است.

عدد اصلی مجموعه

اگر مجموعهٔ A دارای K عضو باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ A را با نماد ریاضی به صورت $n(A) = K$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم عدد اصلی مجموعهٔ A، برابر K است.

نکته

- برای تعیین تعداد عددهای صحیح از a تا b $(b > a)$ از رابطهٔ $b - a + ۱$ استفاده می‌کنیم.
- برای تعیین تعداد عددهای صحیح بین a تا b $(b > a)$ از رابطهٔ $b - a - ۱$ استفاده می‌کنیم.
- برای تعیین تعداد عددهای متوالی که با فاصلهٔ مساوی از یکدیگر قرار دارند، از رابطهٔ $(\frac{\text{بزرگ‌ترین عدد - کوچک‌ترین عدد}}{\text{فاصلهٔ دو عدد متوالی}} + ۱)$ استفاده می‌کنیم.

مجموعهٔ $A = \{۲^{۱۱} + ۲, ۲^{۱۱} + ۴, \dots, ۲^{۱۲}\}$ چند عضو دارد؟ (تیزهوشان)

۱) $۲^{۱۲}$ ۲) $۲^۹$ ۳) $۲^{۱۰}$ ۴) $۲^{۱۱}$

گزینهٔ «۳»

روش اول: می‌دانیم که $۲^{۱۲} = ۲ \times ۲^{۱۱} = ۲^{۱۱} + ۲^{۱۱}$ می‌باشد، بنابراین مجموعهٔ A را به‌صورت $\{۲^{۱۱} + ۲^{۱۱}, \dots, ۲^{۱۱} + ۶, ۲^{۱۱} + ۴, ۲^{۱۱} + ۲\}$ می‌نویسیم. از طرفی اگر از تمامی عضوها، عبارت $۲^{۱۱}$ را حذف کنیم، مجموعهٔ $B = \{۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۲^{۱۱}\}$ به دست می‌آید که نشان‌دهندهٔ عددهای زوج ۲ تا $۲^{۱۱}$ است و تعداد عضوهایش با مجموعهٔ A برابر می‌باشد، پس:

تعداد عضوهای مجموعهٔ A $= ۲^{۱۱} \div ۲ = ۲^{۱۰}$

روش دوم: با استفاده از رابطهٔ «تعداد عددهای متوالی با فاصلهٔ مساوی» داریم:

$$n(A) = \frac{۲^{۱۲} - (۲^{۱۱} + ۲)}{۲} + ۱ = \frac{(۲^{۱۱} + ۲^{۱۱}) - (۲^{۱۱} + ۲)}{۲} + ۱ = \frac{۲^{۱۱} + \cancel{۲^{۱۱}} - \cancel{۲^{۱۱}} - ۲}{۲} + ۱ = \frac{۲^{۱۱} - ۲}{۲} + \frac{۲}{۲} = \frac{۲^{۱۱}}{۲} = ۲^{۱۰}$$

تعداد عضوهای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، نادرست نوشته شده است؟ (آزمون ورودی)

۱) $A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots, ۱۰۵\} \Rightarrow n(A) = ۳۵$

۲) $B = \{-۳۵, -۳۳, -۳۱, \dots, +۱۷\} \Rightarrow n(B) = ۲۹$

۳) $C = \{-۱۰۰۰, +۹۹۵, -۹۹۰, \dots, -۱۱۰\} \Rightarrow n(C) = ۱۷۹$

۴) $D = \{-۹/۲۵, -۹, -۸/۷۵, \dots, +۹\} \Rightarrow n(D) = ۷۴$

گزینهٔ «۲»؛ بررسی گزینه‌ها:

۱) عضوهای مجموعهٔ A، مضرب‌های طبیعی عدد ۳، هستند. بنابراین کافی است که آخرین عضو را بر ۳ تقسیم کنیم: $n(A) = \frac{۱۰۵}{۳} = ۳۵$

تذکر: با استفاده از رابطهٔ «تعداد عددهای متوالی با فاصلهٔ مساوی» نیز می‌توان تعداد اعضای این مجموعه را پیدا کرد.

۲) فاصلهٔ بین عددهای متوالی برابر ۲ واحد است، بنابراین طبق نکات بالا داریم: $n(B) = \frac{+۱۷ - (-۳۵)}{۲} + ۱ = \frac{۵۲}{۲} + ۱ = ۲۷$

۳) عددها یکی در میان مثبت و منفی هستند، بنابراین ابتدا علامت‌ها را کنار می‌گذاریم، حالا می‌بینیم که فاصلهٔ بین عددها ۵ تا ۵ تا است،

پس: $n(C)=\frac{۱۰۰۰-۱۱۰}{۵}+۱=\frac{۸۹۰}{۵}+۱=۱۷۸+۱=۱۷۹$

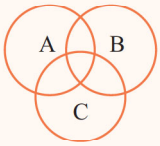
۴) فاصلهٔ بین عددهای متوالی ۰/۲۵ می‌باشد، بنابراین: $n(D)=\frac{(+۹)-(-۹/۲۵)}{۰/۲۵}+۱=\frac{۱۸/۲۵}{۰/۲۵}+۱=\frac{۱۸۲۵}{۲۵}+۱=۷۳+۱=۷۴$

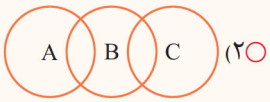
بنابراین تنها در گزینهٔ «۲» تعداد اعضای مجموعه به درستی نوشته نشده است.

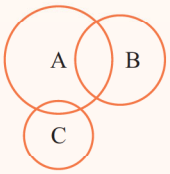
نمودار وِن

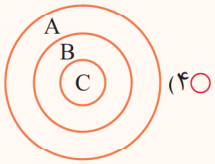
برای نمایش یک مجموعه می‌توانیم اعضای آن را داخل یک منحنی بسته و یا خط شکسته بسته بنویسیم که به این نوع از نمایش مجموعه‌ها، نمودار وِن گفته می‌شود.

اگر $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{b,c\}$ و $C=\{c\}$ باشد، کدام‌یک از شکل‌های زیر نمودار ون مجموعه‌های A، B و C را نشان می‌دهد؟ (کنکور)

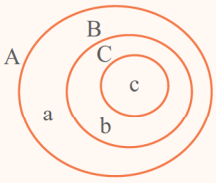
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

گزینهٔ «۴»؛ c عضو هر سه مجموعه، b فقط عضو مجموعه‌های A و B و a نیز فقط عضو مجموعه A است، بنابراین:



سؤالات پرتکرار و رایج درس اول

۱ **کدام‌یک از گزینه‌های زیر، یک مجموعه را مشخص می‌کند؟**

۱) اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸ (زنجان ۹۹)

۲) سه عدد بخش‌پذیر بر ۱۱

۳) دو عدد که حاصل‌ضرب آن‌ها ۵ شود.

۴) چهار عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۱۲ شود.

۲ **کدام‌یک از گزینه‌های زیر تشکیل مجموعه نمی‌دهد؟** (گلستان ۹۹)

۱) دو عدد بین ۱ و ۴

۲) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

۳) اعداد طبیعی بین ۳ و ۴

۴) دو عدد صحیح بین ۳ و ۶

۳ **چه تعداد از عبارت‌های زیر تشکیل مجموعه می‌دهد؟** (فوزستان ۹۹)

آ) شمارنده‌های مرکب عدد ۱۱

ب) اعداد گویای کمتر از ۱-

پ) پنج عدد گنگ بین $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۲۳}$

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴ **کدام‌یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند؟** (یزد ۹۹)

۱) اعداد گویای بین ۶ و ۵

۲) اعداد طبیعی بین ۱ و ۱-

۳) اعداد طبیعی مضرب ۳ که اول باشند.

۴) اعداد حقیقی بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

۵ **کدام گزینه مجموعهٔ تهی را معرفی نمی‌کند؟** (پایش ۹۹)

۱) کوچک‌ترین عدد گویای بزرگ‌تر از ۲.

۲) همهٔ اعداد طبیعی دو رقمی که بیش از ۱۰۰ مقسوم‌علیه دارند.

۳) همهٔ اعداد گویایی که مجموع صورت و مخرج آنها برابر $\sqrt{۲}$ باشد.

۴) اعداد صحیحی که نه زوج هستند و نه فرد.

۶ **مجموعهٔ A دارای چند عضو است؟** $A=\{\{\},\varnothing\}$

۱) ۲ عضو ۲) هیچ عضوی ندارد.

۳) ۱ عضو ۴) هیچ‌کدام

۷ **مجموعهٔ $\{\{\varnothing\}\},\{\{\}\},\{\varnothing,۰\},\{\},\varnothing,۰\}=A$ چند عضو دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

خرید آنلاین در gajmarket.com

۸ ○○○ کدام گزینهٔ زیر، نشان‌دهندهٔ مجموعه‌ای یک عضوی است؟

۱) عددهای طبیعی بین ۳- و ۴-

۲) عددهای طبیعی که نه اول و نه مرکب هستند.

۳) عددهای اول یک‌رقمی

۴) مضرب‌های صحیح ۷

---

۹ ○○○ مجموعهٔ $A=\{\{1,2,3,4,\cdots\}\}$ چند عضو دارد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) بی‌شمار

---

۱۰ ○○ مجموعهٔ $A=\{1,3,3,3,5,5,5,5,5,\cdots,11\}$ که در آن هر عدد به تعدادِ خودش نوشته شده است، دارای چند عضو است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۳۶ ۲) ۱۱

۳) ۶ ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

---

۱۱ ○○ اگر داشته باشیم؛ $A_1=\{1\}$، $A_2=\{2,3\}$، $A_3=\{4,5,6\}$ و $A_4=\{7,8,9,10\}$، در این صورت مجموعهٔ A_{10} با چه عددی شروع می‌شود؟ (آزمون ورودی)

۱) ۴۵ ۲) ۴۶

۳) ۵۵ ۴) ۵۶

---

۱۲ ○○ سی‌ویکمین عضو از مجموعهٔ $\{2,-7,12,-17,\cdots,202\}$ کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) -147 ۲) ۱۴۷

۳) -152 ۴) ۱۵۲

---

۱۳ ○○ مجموعهٔ $A=\{2^{401}+6,\cdots,2^{400}+4,2^{400}+2\}$ چند عضو دارد؟ (آزمون انرژی اتمی)

۱) 2^{399} ۲) 2^{400}

۳) ۴۰۰ ۴) ۳۹۹

---

۱۴ ○○ مجموعهٔ $A=\{2^{101}+8,\cdots,2^{100}+4,2^{100}+2\}$ چند عضو دارد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۲۰۱ ۲) ۲۰۰

۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

---

۱۵ ○○ مجموعهٔ $A=\{3^{50},9^{25},\sqrt{3^{100}},27^{25}\}$ چند عضو دارد؟ (بوشهر ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

---

۱۶ ○○ همهٔ اعداد طبیعی دورقمی را درنظر می‌گیریم و مجموع ارقام هر عدد را از خود عدد کم می‌کنیم، سپس باقیمانده‌های به‌دست‌آمده را در مجموعه‌ای به نام A می‌نویسیم، در این صورت $n(A)$ برابر کدام گزینه می‌شود؟ (چهارمحال و بختیاری ۹۹)

۱) ۹۰ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۸۹

---

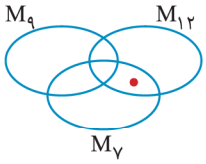
۱۷ ○○ اگر $M=\{a,a+1,a-2,a+3\}$ و $5\in M$ ولی $7\notin M$ آنگاه a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (تهران ۹۹)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

---

۱۸ ○○ در نمودار زیر، مجموعه‌های M_7، M_9 و M_{12} به ترتیب مضرب‌های ۷، مضرب‌های ۹ و مضرب‌های ۱۲ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در شکل نشان داده شده است، نمایانگر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟ (پیشرفت تحصیلی تیزهوشان)



۱) ۴۹ ۲) ۶۰

۳) ۲۵۲ ۴) ۱۶۸

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌های برابر

آموختیم که هرگاه، هر عضو از مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد و برعکس، هر عضو از مجموعهٔ B نیز عضوی از مجموعهٔ A باشد، در این صورت هر دو مجموعهٔ A و B با هم برابر هستند و می‌نویسیم $A = B$.

در مجموعه‌های برابر باید تعداد و خود عضوها دقیقاً مثل هم باشند، بنابراین در سؤال‌های مربوط به مجموعه‌های برابر ابتدا به عضوهای هر دو مجموعه دقت می‌کنیم و اگر عضو تکراری در هر کدام از مجموعه‌ها وجود داشت، عضوهای اضافی را حذف می‌کنیم. سپس با تعیین عضوهای مشترک در هر دو مجموعه و برقراری تساوی بین آنها، معادله تشکیل می‌دهیم و مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم.

دو مجموعهٔ $A = \{\{x-1\}, \{3\}\}$ و $B = \{\{5\}, \{x-y\}\}$ مساوی‌اند. x و y در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟ (تیزهوشان)

۱) $x = 6$ و $y = 3$
۲) $x = 3$ و $y = 6$
۳) $x = 3$ و $y = 3$
۴) $x = 6$ و $y = 6$

گزینهٔ «۱»؛ هر کدام از مجموعه‌های A و B دارای دو عضو هستند. توجه داشته باشید که عضو $\{3\}$ از مجموعهٔ A نمی‌تواند با عضو $\{5\}$ از مجموعهٔ B برابر باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\{x-1\} = \{5\} \Rightarrow x-1 = 5 \Rightarrow x = 5+1 = 6$$

$$\{x-y\} = \{3\} \Rightarrow x-y = 3 \xrightarrow{x=6} 6-y = 3 \Rightarrow y = 3$$

در تساوی $\{a\} = \{(3x-25), (2x-5)\}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{25}{3}$
۲) ۷
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۴

گزینهٔ «۲»؛ ظاهراً مجموعهٔ $\{(3x-25), (2x-5)\}$ دارای ۲ عضو است، اما با توجه به اینکه این مجموعه با مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ برابر است، پس باید $2x-5$ و $3x-25$ با همدیگر برابر باشند تا هر دو مجموعه تک عضوی باشند، بنابراین:

$$2x-5 = 25-3x \Rightarrow 2x+3x = 25+5 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{5} = 6$$

حالا $x = 6$ را در یکی از عبارت‌ها جایگذاری می‌کنیم و با عضو a از مجموعه دیگر مساوی قرار می‌دهیم:

$$a = 2x-5 = 2\times 6-5 = 7 \Rightarrow a = 7$$

زیرمجموعه

هرگاه هر عضو از مجموعه A، عضوی از مجموعهٔ B باشد، یا به عبارت دیگر همهٔ عضوهای مجموعهٔ A را از عضوهای مجموعهٔ B انتخاب کرده باشیم، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است و با نماد ریاضی $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اگر بتوانیم عضوی در A بیابیم که در B نباشد آنگاه A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

نکته

- اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، آنگاه $A = B$ می‌باشد.
- مجموعه تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست و هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است. $(A \subseteq A)$.

اگر $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ باشد، کدام عبارت نادرست است؟ (کنکور)

۱) $\{1\} \in E$
۲) $\{1\} \subseteq E$
۳) $\{1, 2\} \in E$
۴) $\{1, 2\} \subseteq E$

گزینهٔ «۱»؛ عضوهای مجموعهٔ E عبارت‌اند از: ۱، ۲ و $\{1, 2\}$. یعنی این مجموعه ۳ عضوی است، پس داریم: $1 \in E$، $2 \in E$ و $\{1, 2\} \in E$.

از طرفی زیر مجموعه‌های این مجموعه عبارت‌اند از:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, E$$

نکته

- هر مجموعهٔ n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است که نصف این زیرمجموعه‌ها، تعداد اعضای زوج و نصف دیگرشان، تعداد اعضای فرد دارند. به طور مثال مجموعهٔ سه عضوی $A = \{x , y , z\}$ دارای $۲^۳$ یعنی ۸ زیرمجموعه است که ۴ تا از آنها دارای تعداد عضوهای زوج و ۴ تا هم دارای تعداد عضوهای فرد هستند. زیرمجموعه‌های مجموعه A عبارت‌اند از:

$\{x , y , z\}$ (فرد عضوی) ، $\{x , y\} , \{x , z\} , \{y , z\}$ (زوج عضوی) ، $\{x\} , \{y\} , \{z\}$ (فرد عضوی) ، $\{\}$ (زوج عضوی)

- هر مجموعهٔ n عضوی دارای n زیرمجموعهٔ یک عضوی و $\frac{n(n-۱)}{۲}$ زیرمجموعهٔ دو عضوی است.
- اگر به تعداد عضوهای یک مجموعه، n عضو اضافه شود، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌هایش ۲^n برابر می‌شود.

مجموعه $\{\varnothing , ۵ , \{۲ , ۳ , ۴ , ۵\} , ۱\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (سمنان ۹۵)

۱) ۱۶ ۲) ۶۳ ۳) ۱۵ ۴) ۳۱

گزینهٔ«۱»؛ دقت کنید که نماد $\varnothing$ و مجموعهٔ $\{۵ , ۴ , ۳ , ۲\}$ هرکدام برای مجموعهٔ داده شده یک عضو حساب می‌شوند. پس تعداد عضوهای مجموعهٔ داده شده برابر ۴ عضو است و در نتیجه این مجموعه دارای $۲^۴$ یعنی ۱۶ زیرمجموعه می‌باشد، در این مجموعه داریم:

$\varnothing \in \{۱ , \{۲ , ۳ , ۴ , ۵\} , ۵ , \varnothing\}$ ، $\varnothing \subseteq \{۱ , \{۲ , ۳ , ۴ , ۵\} , ۵ , \varnothing\}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۳$ عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n-۱$ عضوی است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۸ برابر ۲) ۳۲ برابر ۳) $(n+۲)$ برابر ۴) ۱۶ برابر

گزینهٔ«۴»؛ می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌ها در هر مجموعه دلخواه برابر است با $۲^{(\text{تعداد اعضا})}$ بنابراین کافی است تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعهٔ $(n+۳)$ و $(n-۱)$ عضوی را محاسبه و بر هم تقسیم کنیم. هر مجموعه $n+۳$ عضوی دارای $۲^{n+۳}$ زیرمجموعه و هر مجموعهٔ $n-۱$ عضوی دارای $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه می‌باشد، بنابراین:

$$۲^{n+۳} \div ۲^{n-۱} = ۲^{n+۳-(n-۱)} = ۲^{n+۳-n+۱} = ۲^۴ = ۱۶$$

تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی یک مجموعهٔ ۹ عضوی، کدام است؟

۱) ۳۱۰ ۲) ۲۴۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۱۰

گزینهٔ«۳»؛ طبق نکتهٔ گفته‌شده هر مجموعهٔ ۹ عضوی دارای $۲^۹$ یعنی ۵۱۲ زیر مجموعه می‌باشد که نصف این تعداد، یعنی $\frac{۵۱۲}{۲} = ۲۵۶$ زیر مجموعه، فرد عضوی و نصف دیگر یعنی ۲۵۶ زیر مجموعه، زوج عضوی هستند.

نکته

- اگر تعداد عضوهای یک مجموعه n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی که شامل a عضو مشخص هستند اما b عضو مشخص را ندارند از رابطه $۲^{n-(a+b)}$ به دست می‌آید. به طور مثال در مجموعهٔ $A = \{۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱\}$ تعداد زیرمجموعه‌هایی که حتماً شامل عضوهای ۲ و ۷ باشند امّا عضو ۵ را نداشته باشند برابر $۲^{۵-(۲+۱)} = ۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه است.

مجموعهٔ $A = \{a , b , c , d , e , f\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که هریک از آنها شامل a باشد و b و c را نداشته باشد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۴

گزینهٔ«۲»؛ مجموعهٔ A دارای ۶ عضو می‌باشد، می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی را مشخص کنیم که شامل عضو a باشند اما b و c را نداشته باشند، بنابراین طبق نکتهٔ بالا تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $۲^{۶-(۱+۲)} = ۲^۳ = ۸$ تا زیرمجموعه است.

نکته

- به تمامی زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ای به غیر از خود آن مجموعه، زیرمجموعه‌های محض آن گفته می‌شود. به طور مثال زیرمجموعه‌های محض مجموعهٔ $A = \{a , b\}$، برابر $\{\}$، $\{a\}$ و $\{b\}$ است. همان‌طور که می‌بینید تعداد زیرمجموعه‌های محض هر مجموعه یک واحد از کل تعداد زیرمجموعه‌های آن کمتر می‌باشد؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ n عضوی برابر $۲^n - ۱$ می‌باشد.

مجموعهٔ A دارای ۲۵۵ زیرمجموعهٔ محض است. این مجموعه چند عضو دارد؟ (تیزهوشان)

۱) ۶۴ ۲) ۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۸

گزینهٔ «۴» $۲^۸ = ۲۵۶ = ۱ + ۲۵۵ =$ تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A $\Rightarrow ۲۵۵ =$ تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعهٔ A

$\Rightarrow$ تعداد عضوهای مجموعهٔ A $= ۸$

نکته

- اگر مجموع تمام اعضای مجموعهٔ عددی A برابر S باشد آنگاه مجموع اعضای تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر $S \times (۲^{n-۱})$ است. به‌طور مثال در مجموعه $A = \{۱ , ۲ , ۳\}$ مجموع همه اعضا برابر $S = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$ می‌باشد، بنابراین مجموع اعضای تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر $۶ \times (۲^{۳-۱}) = ۲۴$ است.

نمایش مجموعه‌ها از زبان ریاضی به مجموعه‌های عددی

در نمایش مجموعه‌ها به زبان ریاضی، هر مجموعه دارای ۲ قسمت است. به مجموعهٔ مقابل دقت کنید: $A = \{\overbrace{۳x - ۱}^{\text{رابطهٔ عضوها}} \mid \overbrace{x \in \mathbb{Z} , x < -۲}^{\text{شرط‌ها}}\}$

عضوهای این مجموعه با رابطهٔ $۳x - ۱$ ساخته می‌شوند که با توجه به شرط‌های $x \in \mathbb{Z} , x < -۲$ باید برای x عددهای -۳، -۴، -۵ و... را در نظر بگیریم و در عبارت $۳x - ۱$ جایگذاری کنیم. بنابراین: $A = \{۳(-۳) - ۱ , ۳(-۴) - ۱ , ۳(-۵) - ۱ , \dots\} = \{-۱۰ , -۱۳ , -۱۶ , \dots\}$

گاهی عضوهای مجموعه به صورت شرط‌هایی خاص بیان می‌شوند که در تعیین اعضای مجموعه باید تمام حالت‌ها را در نظر بگیریم.

به مثال زیر توجه کنید.

مجموعهٔ $A = \{x^y \mid x , y \in \mathbb{Z} , xy = ۴\}$ چند عضو دارد؟ (آزمون ورودی)

۱) سه تا ۲) چهار تا ۳) شش تا ۴) پنج تا

گزینهٔ «۲»؛ ابتدا تمامی عددهای صحیحی که حاصل‌ضرب آنها برابر ۴ می‌شود را در جدول می‌نویسیم:

x	-۴	-۲	-۱	۱	۲	۴
y	-۱	-۲	-۴	۴	۲	۱

حالا با توجه به عددهای به دست آمده، تمامی حالت‌های x^y را می‌نویسیم، سپس عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم.

$A = \{(-۴)^{-۱} , (-۲)^{-۲} , (-۱)^{-۴} , ۱^۴ , ۲^۲ , ۴^۱\} = \{-\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۴} , +۱ , ۱ , ۴ , ۴\} = \{-\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۴} , ۱ , ۴\} \Rightarrow$ چهار عضوی است.

نمایش مجموعه‌های اعداد به زبان ریاضی

به تکنیک‌های زیر برای پیدا کردن رابطهٔ بین عضوهای یک مجموعهٔ عددی توجه کنید.

۱- گاهی اوقات وقتی عضوهای مجموعه را به صورت صعودی (یعنی از کوچک به بزرگ) می‌نویسیم، فاصلهٔ بین عضوها، عدد ثابتی است. در این حالت برای نمایش عضوها می‌توانیم از مضارب همان عدد ثابت استفاده کنیم؛ مثلاً:

$$B = \{-۸ \overset{+۵}{,} -۳ \overset{+۵}{,} ۲ \overset{+۵}{,} ۷ , \dots , ۵۲\} = \{۵(-۲) + ۲ , ۵(-۱) + ۲ , ۵(۰) + ۲ , \dots , ۵(۱۰) + ۲\} = \{۵x + ۲ \mid x \in \mathbb{Z} , -۳ < x < ۱۱\}$$

اگر A مجموعهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹ باشد و مجموعهٔ $B = \{x \mid -۳x \in A\}$ باشد، مجموعهٔ B کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) $\{۴ , ۵ , ۶\}$ ۲) $\{-۱۸ , -۱۵ , -۱۲\}$ ۳) $\{-۶ , -۵ , -۴\}$ ۴) $\{۱۲ , ۱۵ , ۱۸\}$

گزینهٔ «۳»؛ مجموعهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹ عبارت‌اند از: $A = \{۱۲ , ۱۵ , ۱۸\}$؛ از طرفی اگر x را عضو B در نظر بگیریم، باید $-۳x$ عضو A باشد، یعنی:

$-۳x = ۱۲ \Rightarrow x = -۴$ و $-۳x = ۱۵ \Rightarrow x = -۵$ و $-۳x = ۱۸ \Rightarrow x = -۶$

بنابراین مجموعهٔ B به صورت: $B = \{-۴ , -۵ , -۶\}$ است.

۲- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، توان‌های مختلف یک عدد هستند؛ مثلاً:

$$C=\{\frac{۱}{۳},۱,۳,۹,\cdots,۲۴۳\}=\{۳^{-۱},۳^{۰},۳^{۱},۳^{۲},\cdots,۳^{۵}\}=\{۳^{x}\mid x\in\mathbb{Z},-۱\le x\le ۵\}$$

۳- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، با عددهای مجذور کامل و یا مکعب کامل ساخته می‌شوند؛ مثلاً:

$$D=\{\overset{+۱}{\frown}\overset{+۳}{\frown}\overset{+۵}{\frown}\overset{+۷}{\frown}۱,۲,۵,۱۰,۱۷,\ldots\}=\{۰^{۲}+۱,۱^{۲}+۱,۲^{۲}+۱,۳^{۲}+۱,\ldots\}=\{x^{۲}+۱\mid x\in\mathbb{W}\}$$

$$E=\{۲,۹,۲۸,\cdots\}=\{۱^{۳}+۱,۲^{۳}+۱,۳^{۳}+۱,\cdots\}=\{x^{۳}+۱\mid x\in\mathbb{N}\}$$

توجه: هرگاه فاصلهٔ بین اعداد به ترتیب ۱، ۳، ۵، ۷ و... (یعنی اعداد فرد متوالی) باشد، عضوهای مجموعه با کمک اعداد مربع کامل ساخته می‌شود.

مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۴,۸,\cdots,۱۲۸\}$ با علایم ریاضی برابر است با: (المپیاد ریاضی)

۱) $\{x^{۲}\mid ۰<x<۸\}$

۲) $\{۲^{x}\mid x\in\mathbb{N},-۱<x\le ۷\}$

۳) $\{۲^{x}\mid x\in\mathbb{Z},-۱<x\le ۷\}$

۴) $\{x^{۲}\mid x\in\mathbb{Z},-۱<x\le ۷\}$

گزینهٔ «۳»

مجموعهٔ A را می‌توانیم به صورت $\{۲^{۷},\cdots,۲^{۲},۲^{۱},۲^{۰}\}$ نمایش دهیم که در تمامی عضوها فقط توان تغییر کرده است، بنابراین:

$$A=\{۲^{x}\mid x\in\mathbb{W},x\le ۷\}=\{۲^{x}\mid x\in\mathbb{Z},-۱<x\le ۷\}$$

مجموعهٔ $B=\{۲,۱۱,۱۰۱,۱۰۰۱,\cdots\}$ به صورت ریاضی کدام است؟ (مسابقات علمی)

۱) $\{۱۰^{x}+۱\mid x\in\mathbb{N}\}$

۲) $\{۱۰^{x}+۱\mid x\in\mathbb{Z},x\ge ۰\}$

۳) $\{۱۰^{x}+۱\mid x\in\mathbb{Z},x\ge -۱\}$

۴) $\{۱۰^{x}+۱\mid x\in\mathbb{Z},-۱\le x<۴\}$

گزینهٔ «۲»

با دقت در مجموعهٔ B، می‌بینید تمامی عضوها به توان‌های عدد ۱۰ نزدیک هستند، بنابراین داریم:

$$B=\{۱۰^{۰}+۱,۱۰^{۱}+۱,۱۰^{۲}+۱,۱۰^{۳}+۱,\cdots\}=\{۱۰^{x}+۱\mid x\in\mathbb{W}\}$$

که البته $x\in\mathbb{W}$ را می‌توانیم به صورت $(x\in\mathbb{Z},x\ge ۰)$ هم نمایش دهیم.

۴- گاهی اوقات عضوهای مجموعه شمارنده‌های عددی مشخص هستند؛ مثلاً:

$$F=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}=\{\frac{۱۸}{۱۸},\frac{۱۸}{۹},\frac{۱۸}{۶},\frac{۱۸}{۳},\frac{۱۸}{۲},\frac{۱۸}{۱}\}=\{x\mid x\in\mathbb{N},\frac{۱۸}{x}\in\mathbb{N}\}$$

۵- گاهی اوقات عضوهای مجموعه، یکی در میان مثبت و منفی هستند، در این حالت باید از $(-۱)^{n}$ و یا توان‌های زوج و یا فرد عددی منفی استفاده کنیم؛ مثلاً:

$$G=\{-۲,۶,-۱۲,۲۰,\cdots,۱۱۰\}=\{(-۱)^{۱}(۱\times ۲),(-۱)^{۲}(۲\times ۳),(-۱)^{۳}(۳\times ۴),\cdots,(-۱)^{۱۰}(۱۰\times ۱۱)\}$$

$$\Rightarrow G=\{(-۱)^{n}(n\times(n+۱))\mid n\in\mathbb{N},n\le ۱۰\}$$

مجموعهٔ $A=\{-۲,۴,-۸,۱۶,\cdots\}$ را به کدام صورت زیر می‌توان نوشت؟ (آزمون ورودی)

۱) $\{-x^{۲}\mid x\in\mathbb{N}\}$

۲) $\{-۲^{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$

۳) $\{(-۲)^{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$

۴) $\{(-۱)^{۲x}\times ۲^{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$

گزینهٔ «۳»

اگر عددی منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و در صورتی که به توان فرد برسد، حاصل عددی منفی است، پس مجموعهٔ A را به صورت مقابل می‌نویسیم تا بتوانیم آن را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم: $A=\{(-۲)^{۱},(-۲)^{۲},(-۲)^{۳},(-۲)^{۴},\cdots\}=\{(-۲)^{x}\mid x\in\mathbb{N}\}$

سؤالات پرتکرار و رایج درس دوم

۱۹ دو مجموعهٔ A و B برابرند، هرگاه:

۱) تمام عضوهای A در B وجود داشته باشد.

۲) هر عضو دلخواه از B در A وجود داشته باشد.

۳) هر یک زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

۴) تعداد عضوهای A و B برابر باشد.

---

۲۰ دو مجموعه $A=\{m^{۳}-\frac{n}{۲},\sqrt{n}\}$ و $B=\{۲\}$ با هم برابرند. مقدار $(\frac{m}{n})^{-۳}$ کدام است؟ *(کردستان ۱۴۰۰)*

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

---

۲۱ اگر $\{۳x+۴,x-۳\}=\{y-۲\}$ باشد، مقدار y برابر است با: *(اردبیل، آذربایجان شرقی ۹۹)*

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۵-

---

۲۲ هر گاه مجموعه‌های $A=\{x^{۲},\sqrt{b},d\}$ و $B=\{-۲,۴\}$ با هم برابر باشند، مقدار $x^{۲}-b$ کدام است؟ *(کردستان ۹۹)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲- ۴) صفر

---

۲۳ دو مجموعهٔ $\{x-y,۱۳\}$ و $\{x+y,۵\}$ برابر می‌باشند. $\frac{x}{y}$ کدام است؟ *(البرز، قزوین ۹۹)*

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $-\frac{۹}{۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

---

۲۴ با توجه به تساوی $\{۲,۵+y,-۴\}=\{۶,۲x,۳-y\}$ مقدار عددی $x+y$ کدام گزینه است؟ *(اصفهان، فارس، بوشهر ۹۹)*

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۱ ۴) ۱-

---

۲۵ اگر $a=b$ و $c=d$، آنگاه مجموعهٔ زیر با کدام‌یک از مجموعه‌ها برابر **نیست**؟ *(ریاضی تکمیلی تیزهوشان)*

$\{\{a\},\{a,b\},\{\{a,c\},a\}\}$

۱) $\{\{a,b\},\{a,a\},\{\{a,c\},b,a\}\}$

۲) $\{\{a\},\{a,b\},\{\{a,c\},a\}\}$

۳) $\{\{a\},\{\{a,d\},b\}\}$

۴) $\{\{a,d\},\{\{a\},c\}\}$

---

۲۶ اگر $\{\{۷,۶\},\{x+۲\},b+۱\}=\{\{k\}\},\{x+۲,k-۱\},۴\}$ باشد، حاصل $x+k-b$ کدام است؟ *(زنجان ۹۹)*

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

---

۲۷ اگر دو مجموعهٔ زیر برابر باشند، آنگاه مقدار $x+y+z$ کدام است؟ *(ریاضی تکمیلی تیزهوشان)*

$\{\{z\},\{z-۱,y+۱\},۳\}$ و $\{\{۲,۱\},\{y+۱\},x+۱\}$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

---

۲۸ دو مجموعهٔ $A=\{y,۸,z\}$ و $B=\{x,۳\}$ برابرند. بیشترین مقدار عبارت $x+y-z$ کدام است؟ *(کرمانشاه، بوشهر، فوزستان ۹۵)*

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

---

۲۹ به ازای چه تعداد عدد صحیح x، دو مجموعهٔ $A=\{۱,x,x^{۲}\}$ و $B=\{y,y^{۲}\}$ می‌توانند برابر باشند؟ *(تیزهوشان)*

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

---

۳۰ اگر a، b و c سه عدد حقیقی و $\{(a+۱)^{۲}+۱,(b-۱)^{۳}\}=\{-۱,-a^{۴},c\}$ آنگاه دربارهٔ دو ادعای زیر چه می‌توان گفت؟

ادعای اول: حاصل c^{a} می‌تواند برابر ۱- باشد.

ادعای دوم: حاصل c^{a} می‌تواند برابر ۵ باشد. *(آزمون ورودی)*

۱) هر دو ادعا درست است.

۲) فقط ادعای اول درست است.

۳) فقط ادعای دوم درست است.

۴) هر دو ادعا نادرست است.

با توجه به تعریف دو عدد هم‌رقم، به سؤال پاسخ دهید.

دو عدد را هم‌رقم می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ رقم‌های دو عدد برابر باشند.

برای مثال، اعداد ۱۲ و ۲۱ هم‌رقم هستند. چون مجموعهٔ رقم‌های ۱۲ مجموعهٔ $\{۱,۲\}$ و مجموعهٔ رقم‌های ۲۱ مجموعهٔ $\{۲,۱\}$ است و $\{۱,۲\}=\{۲,۱\}$.

۳۱ چند عدد سه رقمی با ۱۲۳ هم‌رقم هستند؟ *(ریاضی تکمیلی تیزهوشان)*

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۲ اگر $A=\{۳, ۲x, ۲-y\}$ و $B=\{۴, ۲+y, ۱\}$ باشد و بدانیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، آنگاه $x+y$ کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۳ با توجه به مجموعهٔ $A=\{\{۱\}, \{۲, ۳, ۴\}, ۵\}$ کدام گزینه درست است؟ (آزمون ورودی)

۱) $۲\in A$ ۲) $\{۲, ۳\}\subseteq A$

۳) $\{۱\}\in A$ ۴) $۴\subseteq A$

۳۴ اگر $A=\{\{۱\}, \{۱, ۲\}, \{۱\}, \{۲\}\}$ کدام گزینه صحیح **نیست**؟ (کردستان ۹۹)

۱) $\{۱, ۲\}\subseteq A$ ۲) $\{۱\}\in A$

۳) $\{۱, ۲\}\in A$ ۴) $\{\}\subseteq A$

۳۵ اگر $A=\{\{۱\}, \{۱, ۲\}, ۱\}$، چند مورد از رابطه‌های زیر **نادرست** است؟ (سمنان ۹۹)

$\{۱\}\in A$ $\{۱\}\subseteq A$ $\{۱, ۲\}\subseteq A$ $\{۱, \{۱, ۲\}\}\subseteq A$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۶ اگر $A=\{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر **نادرست** است؟ (ریاضی تکمیلی تیزهوشان)

۱) $\{a\}\subseteq A$ ۲) $\{a\}\in A$

۳) $\{a, b\}\subseteq A$ ۴) $\{b\}\in A$

۳۷ با توجه به مجموعه $A=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ کدام یک از عبارت‌های زیر **نادرست** است؟ (پایش ۹۸)

۱) $\{\{\emptyset\}\}\in A$ ۲) $\{\{\emptyset\}\}\subseteq A$

۳) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\in A$ ۴) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\subseteq A$

۳۸ اگر $A=\{۲\}$، $B=\{۲, \{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\}, \{۲, \{۲\}\}\}$ باشد، کدام رابطه **نادرست** است؟ (کنکور)

۱) $B\subseteq A$ ۲) $A\subseteq B$

۳) $A\in B$ ۴) $B\in C$

۳۹ با فرض $A\not\ni ۲$ و $A\subseteq \{۱\}$ و $n(A)=۳$، مجموعهٔ A کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ (گلستان ۱۴۰۰)

۱) $\{۱, ۱, ۳\}$ ۲) $\{۱, ۲, ۳\}$

۳) $\{۱, ۲۰, ۵\}$ ۴) $\{۱, ۳, ۴, ۵\}$

۴۰ کدام گزینه همواره درست است؟ (پایش ۹۹)

۱) اگر $A\in B$ و $B\in C$ آنگاه $A\in C$.

۲) اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$.

۳) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$ آنگاه $A\subseteq C$.

۴) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$ آنگاه $A\in C$.

۴۱ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های $M=\{\{\}, \{\emptyset\}\}$ کدام گزینه است؟ (تیزهوشان)

۱) $\{\{\}, \{\emptyset\}, M\}$

۲) $\{\{\{\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\}\}, M\}$

۳) $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\emptyset\}\}, M\}$

۴) مجموعهٔ $\emptyset$، تنها زیرمجموعهٔ M است.

۴۲ تعداد زیرمجموعه‌های $B=\{۴, \{۳\}\}$ چند برابر زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰\}\}$ می‌باشد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳ مجموعهٔ A دارای $۲۵۶^{۵}$ زیرمجموعه است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ دوعضوی دارد؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۴۰ ۳) ۷۸۰ ۴) ۸۰۰

۴۴ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل‌ضرب اعضای آن در هم، برابر ۴۵ شود؟ (تیزهوشان)

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۴۵ اگر A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B باشد، مقدار b کدام است؟ (تیزهوشان)

$B=\{۳, ۲a+۱, \{-a, ۰\}\}$ $A=\{a, \{۱, ۲a+b\}\}$

۱) -۶ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۹

۴۶ مجموعهٔ $\{۲^{۱۳۹۱}, \cdots, ۲^{۱۳۹۰}+۸, ۲^{۱۳۹۰}+۴, ۲^{۱۳۹۰}+۲\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (تیزهوشان)

۱) $۲^{۱۳۹۱}$ ۲) $۲^{۱۳۸۹}$ ۳) $۲^{۱۳۹۰}$ ۴) $۲^{۱۳۸۸}$

۴۷ مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots, ۹۹\}$ چند زیرمجموعهٔ دوعضوی به شکل $\{x, x+۲\}$ دارد؟ (یعنی مجموعه‌های دوعضوی‌ای که در هر کدام، اختلاف دو عضو برابر ۲ باشد.) (تیزهوشان)

۱) ۹۹ ۲) ۹۷ ۳) ۹۸ ۴) ۹۶

۴۸ A یک مجموعهٔ ۶ عضوی است که جمع عضوهای آن، ۴۰ است. مجموع عضوهای همهٔ زیرمجموعه‌های A چقدر است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۱۲۸۰ ۳) ۱۰۲۰ ۴) ۹۸۰

۴۹ اگر به مجموعهٔ A دو عضو جدید اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد اضافه می‌شود. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟ (قلم ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۰ مجموع تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی و $k+1$ عضوی ۴۸ می‌باشد. مقدار k کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۱ چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$، حداقل ۳ عضو دارند؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۹۶۹ ۳) ۹۶۸ ۴) ۹۲۴

۵۲ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$ که بزرگ‌ترین عضو آن، ۷ می‌باشد برابر است با: (آزمون ورودی)

۱) ۱۲۸ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۸

۵۳ مجموعهٔ $\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه شامل عضو a می‌باشد؟ (کنکور)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵۴ چند زیرمجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ شامل عضوهای ۲ و ۵ هستند؟ (آزمون ورودی)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴

۵۵ در مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که a عضو آن باشد، ولی b عضو آن نباشد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱۵ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۵۶ مجموعهٔ $\{1,2,3,\cdots,7\}$ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد که شامل ۴ و فاقد ۷ و ۵ می‌باشد؟ (آزمون ورودی)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۵۷ مجموعه $A=\{1,2,\cdots,18\}$ مفروض است. چند زیرمجموعه حداکثر ۵ عضوی از A می‌توان نوشت که شامل اعضای ۱ و ۲ و ۳ باشند؟ (پایش ۹۶)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۱۲۲ ۴) ۱۲۳

۵۸ چند مجموعهٔ A می‌توان نوشت که رابطهٔ زیربرای آن برقرار باشد؟ (آزمون ورودی)

$\{2,4,6,8\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,\cdots,10\}$

۱) ۶ ۲) ۱۰۰۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۵۹ چند مجموعه مانند C وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق کند؟ (ماندگار البرز ۹۹)

$\{2,5\}\subseteq C\subseteq\{1,2,3,4,5\}$

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۶۰ مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ چند زیرمجموعه دارد که کوچک‌ترین عضو آن عدد ۱ و بزرگ‌ترین عضو آن عدد ۱۰ باشد؟ (گیلان ۱۴۰۰)

۱) 2^9 ۲) 2^8 ۳) 2^7 ۴) 2^6

۶۱ در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۱ می‌باشد؟ (المپیاد ریاضی)

۱) ۳۲۰ ۲) ۳۲۸ ۳) ۳۴۱ ۴) ۳۵۲

۶۲ مجموعهٔ A، دقیقاً ۳ زیرمجموعهٔ دو عضوی دارد که هر دو عضو آنها اول هستند و همچنین دقیقاً ۱۵ زیرمجموعه غیرتهی دارد که هیچ عضو آنها اول نیستند؛ در این صورت $n(A)$ برابر است با: (فراسان رضوی ۹۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۳ در چند زیرمجموعه از اعداد طبیعی یک‌رقمی، حداقل یک عدد اول وجود دارد؟ (آذربایجان شرقی ۹۵)

۱) ۴۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۶۴ ۴) ۱۶

۶۴ چند زیرمجموعه از مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ می‌توان نوشت که هر دوتای آنها حداقل در ۲ عضو مشترک باشند؟ (پایش ۹۵)

۱) ۲۴ ۲) ۲۳ ۳) ۲۲ ۴) ۲۱

با توجه به تعریف **زنجیر** به سؤال زیر پاسخ دهید.

اگر A یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های A که بین هر دو عضوِ آن رابطهٔ زیرمجموعه ($\subseteq$) برقرار باشد، یک «زنجیر» می‌گویند. برای مثال، اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، آنگاه مجموعهٔ زیر، یک زنجیر سه عضوی از مجموعهٔ A است.

$$\{\{۱\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳\}\}$$

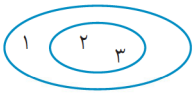
زیرا: $\{۱,۳\}\subseteq\{۱,۳,۴\},\{۱\}\subseteq\{۱,۳,۴\},\{۱\}\subseteq\{۱,۳\}$

۶۵ فرض کنید $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$. دو زیرمجموعهٔ $\{۱\}$ و $\{۱,۳,۷\}$ از مجموعهٔ M را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعهٔ دیگر از M به همراه این دو زیرمجموعه، تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟ *(ریاضی تکمیلی تیزهوشان)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۶ کدام‌یک از گزینه‌های زیر **نمی‌تواند** نمایش یک مجموعه باشد؟ *(خراسان رضوی ۹۹)*

۱) دو ورزشکار مشهدی

۲) 

۳) $\{x\in\mathbb{N}\mid x\geq ۷\}$

۴) $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$

۶۷ چند تا از مجموعه‌های زیر، فقط یک زیرمجموعه دارد؟ *(خراسان رضوی ۹۹)*

$$A=\{x\in\mathbb{N}\mid \sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۳}\}\qquad B=\{x\in\mathbb{Z}\mid -\sqrt{۲}<x<۰\}$$

$$C=\{x\in\mathbb{Q}'\mid \sqrt{۲}<x<\sqrt{۳}\}$$

۱) صفر ۲) یک

۳) دو ۴) سه

۶۸ تعداد عضوهای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر از بقیه بیشتر است؟

۱) $A=\{۲x+۱۳۹۹\mid x\in\mathbb{N},\ x<۳\}$ *(زنجان ۹۹)*

۲) $B=\{x\mid x^{۲}\in\mathbb{Z},\ -۵<x<۵\}$

۳) $C=\{\frac{x}{۲}\mid \sqrt{x}\in\mathbb{N},\ x^{۲}<۱۰۰\}$

۴) $D=\{۲x\mid x\in\mathbb{N},\ x<۲۵\}$

۶۹ نمایش مجموعهٔ زیر مساوی با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟ $A=\{x\mid\sqrt{x}\in\mathbb{N}\}$ *(المپیاد ریاضی)*

۱) $\{۱,۲,۳,\dots\}$ ۲) $\{۱,۴,۹,\dots\}$

۳) $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\dots\}$ ۴) $\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

۷۰ اگر P مجموعهٔ اعداد اول و $A=\{x\mid x\in P,\ x<\sqrt{۸۰۰۰}\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟ *(تیزهوشان)*

۱) $A\subseteq P$

۲) $P\subseteq A$

۳) $A=P$

۴) مجموعهٔ A و P عضو مشترک ندارند.

۷۱ مجموعهٔ $A=\{x^{y}\mid x,y\in\mathbb{Z},\ xy=۸\}$ چند زیرمجموعهٔ دوعضوی دارد؟ *(آزمون ورودی)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۲ مجموعهٔ $A=\{\sqrt{x^{۲}+۱}\mid x\in\mathbb{Z},\ -۲\leq x<۳\}$، چند زیرمجموعه دارد؟ *(آزمون ورودی)*

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۷۳ اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid ۱۰<(x-۳)^{۲}<۱۰۰\}$، آنگاه حاصل‌جمع عضوهای مجموعهٔ A کدام است؟ *(آزمون ورودی)*

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۹ ۴) صفر

۷۴ اگر $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\leq ۲۰\}$، $B=\{۳x-۷\mid x\in A\}$ و $B\subseteq A$ باشند، مجموعهٔ B چند عضو دارد؟ *(آزمون ورودی)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۷۵ مجموعهٔ $A=\{۲^{۳x+y}\mid x,y\in\mathbb{Z},\ -۴\leq ۲x\leq ۲,\ xy=۱۲\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ *(آزمون ورودی)*

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۳۲

۷۶ تعداد اعضای مجموعهٔ $A=\{۵x^{۴}-۳\mid x\in\mathbb{Z},\ x^{۲}-۱<۱۸\}$ برابر است با: *(آزمون ورودی)*

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۵

۷۷ اگر $A=\{-x^{۲}+۱\mid x\in\mathbb{Z},\ -۲\leq x<۳\}$ و $B=\{-x^{۳}\mid x\in A\}$ باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعهٔ B را نشان می‌دهد؟ *(تیزهوشان)*

۱) $\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

۲) $\{-۳,۱,۰\}$

۳) $\{-۱,۰,۲۷\}$

۴) $\{-۸,-۱,۰,۱,۸\}$

۷۸ کدام گزینه نمایش مجموعه $\{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۶}, \dots\}$ با نمادهای ریاضی است؟ (آزمون پیشرفت تحصیلی تیزهوشان)

۱) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

۲) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b > a\}$

۳) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b \geq ۲\}$

۴) $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b = a+۱\}$

۷۹ مجموعهٔ $A = \{۰, ۱, ۳, ۷, \dots\}$ با علائم ریاضی برابر است با: (تیزهوشان)

۱) $A = \{۲^x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

۲) $A = \{۲^x - ۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$

۳) $A = \{۲^x - ۱ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

۴) $A = \{۲^x - ۱ \mid x \in \mathbb{R}\}$

۸۰ نمایش عددی مجموعهٔ $\{x-۱ \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۳\}$ کدام گزینه است؟ (چهارمحال و بختیاری ۱۴۰۰)

۱) $\{۰, ۱, ۲\}$

۲) $\{۱, ۲, ۳\}$

۳) $\{۰, ۱\}$

۴) $\{۱, ۲\}$

۸۱ نمایش مجموعهٔ $A = \{x^۳ \mid \frac{x}{۲} \in \mathbb{N}, ۱ < x < ۸\}$ با عضوهایش در کدام گزینه نوشته شده است؟ (تیزهوشان)

۱) $\{۸, ۶۴, ۲۱۶\}$

۲) $\{۸, ۶۴, ۲۱۶, ۵۱۲\}$

۳) $\{۲, ۴, ۶\}$

۴) $\{۶, ۱۲, ۱۸\}$

۸۲ کدام مجموعهٔ زیر تهی است؟ (آزمون ورودی)

۱) $A = \{\sqrt{-x} \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq ۰\}$

۲) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, ۵^x = ۲^x\}$

۳) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -x > x\}$

۴) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^۲ + ۱ = ۰\}$

۸۳ کدام مجموعه، نمایش ریاضی مجموعهٔ زیر است؟ $A = \{۷, ۷۷, ۷۷۷, ۷۷۷۷, \dots\}$ (تیزهوشان)

۱) $\{۷ \times \frac{۱۰^x + ۱}{۹} \mid x \in \mathbb{N}\}$

۲) $\{۷ \times \frac{۱۰^x - ۱}{۹} \mid x \in \mathbb{Z}\}$

۳) $\{۷ \times \frac{۱۰^x - ۱}{۹} \mid x \in \mathbb{W}\}$

۴) $\{۷ \times \frac{۱۰^x - ۱}{۹} \mid x \in \mathbb{N}\}$

۸۴ کدام مجموعهٔ زیر با عضوهایش هم‌خوانی **ندارد**؟ (تیزهوشان)

۱) $\{n^۲ + ۱ \mid n \in \mathbb{W}\} = \{۱, ۲, ۵, ۱۰, ۱۷, \dots\}$

۲) $\{n(n+۲) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ۳۵, \dots\}$

۳) $\{(-n)^۲ \mid n \in \mathbb{N}, ۹ < n < ۱۵\} = \{-۱۹۶, -۱۶۹, -۱۴۴, -۱۲۱, -۱۰۰\}$

۴) $\{\frac{n}{n^۲+۱} \mid n \in \mathbb{Z}, -۴ < n < ۴\} = \{-\frac{۳}{۱۰}, -\frac{۲}{۵}, -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۱۰}\}$

۸۵ مجموعهٔ $\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots\}$ به صورت نماد ریاضی کدام گزینه است؟ (زنجان ۱۴۰۰)

۱) $\{n^۲ + ۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$

۲) $\{n^۲ + ۲n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۳) $\{n(n+۱) \mid n \in \mathbb{N}\}$

۴) $\{n(n+۱) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

۸۶ مجموعه‌های A و M را در نظر بگیرید. مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

$$A = \{x = \frac{k}{k^۲} \mid x \in \mathbb{Z}, k \in M\} \quad و \quad M = \{-۳, -۲, -۱, ۱, ۲, ۳\}$$

(البرز، قزوین ۹۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۷ مجموعهٔ $A = \{\frac{۲^k}{k^۲} \mid k \in \mathbb{N}, k \leq ۶\}$ چند عضو دارد؟ (قم ۱۴۰۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۸۸ اگر $A = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{Z}, x^۴ < ۱۷\}$ باشد، مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد؟ (ماندگار البرز ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۹ رضا و سعید در یک بازی دونفره شرکت می‌کنند. سعید روی تعدادی کارت، اعدادی را می‌نویسد و رضا باید مجموعه‌ای به زبان ریاضی برای اعداد روی آن کارت‌ها بیان کند. اگر سعید ۷ کارت با اعداد ۶۴ و ۲ و ۴ و ۱۶ و ۸ و ۳۲ و ۱ به رضا بدهد و رضا جواب‌های زیر را اعلام کند، چند تا از پاسخ‌های رضا درست است؟

$$A = \{۲^{x-۱} \mid x \in \mathbb{N}, x < ۸\} \quad , \quad B = \{۲^{۷-x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۷\}$$

$$C = \{۲^x \mid x \in \mathbb{W}, x < ۷\} \quad , \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۶۴}{x} \in \mathbb{N}\}$$

(پایش ۹۵)

۱) یکی ۲) دوتا ۳) سه‌تا ۴) چهارتا

۹۰ چند تا از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ $\{\frac{۹}{۲}, \frac{۱۰}{۳}, \frac{۱۱}{۴}, \cdots, \frac{۱۳۹۹}{۱۳۹۲}\}$ برابر است؟ (پایش ۹۶)

$A = \{x \in \mathbb{Q} | \frac{۱۳۹۹}{۱۳۹۲} \le x \le \frac{۹}{۲}\}$

$B = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{N}, ۹ \le m < ۱۴۰۰, ۱ < n \le ۱۳۹۲\}$

$C = \{\frac{x+۹}{x+۲} | x \in \mathbb{W}, x \le ۱۳۹۹\}$

۱) یکی ۲) دوتا
۳) سه‌تا ۴) هیچی

۹۱ کدام مجموعه نشان‌دهندهٔ اعضای مجموعهٔ زیر می‌باشد؟ (پایش ۹۶)

$\{(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}} \times n | n \in \mathbb{W}, n \le ۵\}$

۱) $\{۰, ۱, ۲, -۳, -۴, ۵\}$
۲) $\{۰, -۱, +۲, ۳, -۴, -۵\}$
۳) $\{۰, ۱, -۲, -۳, ۴, ۵\}$
۴) $\{۰, -۱, -۲, ۳, ۴, -۵\}$

۹۲ اگر $M = \{x | x \in \mathbb{R}, x < ۱۰\}$ و $A = \{\sqrt{a} | a \in M\}$، آنگاه A چند عضو صحیح دارد؟ (ریاضی تکمیلی تیزهوشان)

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۹۳ اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد یک‌رقمی باشد و داشته باشیم:

$B = \{ab | \{a, b\} \subseteq A, a \ne b\}$

آنگاه تعداد اعضای مجموعه B برابر است با: (ریاضی تکمیلی تیزهوشان)

۱) ۱۰ ۲) ۲۵
۳) ۱۲ ۴) ۹

۹۴ فرض کنید n یک عدد ثابت، $A = \{۳x + n | x \in \mathbb{Z}\}$ و $-۲۳ \in A$. اگر $\{a, b\} \subseteq A$، آنگاه $a+b$ به چند تا از مجموعه‌های زیر می‌تواند تعلق داشته باشد؟ (ریاضی تکمیلی تیزهوشان)

آ) $\{۱۳۹۵, ۱۴۳۸, ۲۰۱۷\}$ ب) $\{۱۳۵۸, ۱۳۸۸, ۱۳۳۴\}$

۱) فقط به مجموعه «آ» تعلق دارد.
۲) فقط به مجموعه «ب» تعلق دارد.
۳) به هر دو مجموعه تعلق دارد.
۴) به هیچ‌کدام تعلق ندارد.

با توجه به تعریف **پادزنجیر**، به سؤال زیر پاسخ دهید.

اگر A یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های A که بین هیچ دو عضو آن رابطهٔ زیرمجموعه برقرار نباشد، پادزنجیر می‌گویند. برای مثال اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، آنگاه مجموعهٔ زیر، یک پادزنجیر سه عضوی است. $\{\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۲, ۴\}\}$

۹۵ طولانی‌ترین پادزنجیر که با زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{x | x \in \mathbb{N}, \frac{۱۶}{x} \in \mathbb{N}\}$ ساخته می‌شود، چند عضوی است؟ (پایش ۹۸)

۱) ۶ ۲) ۱۰
۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۶ مجموعه $A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ را یک «مجموعه جذاب» می‌نامیم، در صورتی که ۳ شرط زیر را دارا باشد: (پایش ۹۵)

شرط اول: $A \subseteq \mathbb{N}$

شرط دوم: اعضای مجموعهٔ A، از کوچک به بزرگ مرتب شده باشد.

شرط سوم: به ازای هر دو عضو متوالی آن مانند a_i و $a_{i+۱}$ داشته باشیم:

$(a_i, a_{i+۱}) = ۱$

چند تا از مجموعه‌های زیر جذاب هستند؟

$A = \{n^۲ | n \in \mathbb{N}\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{N} | \frac{۱۸۹}{x} \in \mathbb{N}\}$

$C = \{۲k - ۷ | k \in \mathbb{N}, ۱۰ \le k \le ۹۰\}$

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر

فصل اول: مجموعه‌ها

۱ گزینهٔ «۱»

$\{\ \}$ = اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸

در گزینه‌های دیگر هر کس به‌صورت سلیقه‌ای پاسخ می‌دهد، لذا مجموعه ریاضی تشکیل نمی‌شود.

---

۲ گزینهٔ «۱»؛ در گزینهٔ «۱» چون به‌صورت سلیقه‌ای پاسخ می‌دهیم لذا مجموعه ریاضی تشکیل نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) $\{\ \}$ = اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱

۳) $\{\ \}$ = اعدا طبیعی بین ۳ و ۴

۴) $\{۴\ ,\ ۵\}$ = دو عدد صحیح بین ۳ و ۶

---

۳ گزینهٔ «۳»؛ بررسی عبارت‌ها:

آ) عدد ۱۱، عددی اول است و شمارندهٔ مرکب ندارد، لذا مجموعهٔ شمارنده‌های مرکب عدد ۱۱ مجموعهٔ تهی می‌باشد.

ب) بی‌شمار عدد گویای کوچک‌تر از ۱ - وجود دارد که نمایش این مجموعه با اعضایش امکان‌پذیر نمی‌باشد اما می‌توانیم آن را با نماد ریاضی نشان دهیم که در درس‌های بعدی می‌آموزید:

$\{x \mid x \in Q\ ,\ x < -۱\}$ = اعداد گویای کمتر از ۱-

پ) می‌دانیم بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد، لذا برای انتخاب پنج عدد گنگ بین $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۲۳}$ باید به‌صورت سلیقه‌ای عمل کنیم؛ پس در این مورد مجموعهٔ ریاضی تشکیل نمی‌شود.

---

۴ گزینهٔ «۲»

اعداد طبیعی عبارت‌اند از $۱, ۲, ۳, ۴, \cdots$ به‌این ترتیب ملاحظه می‌کنید که هیچ عدد طبیعی بین ۱ و ۱ - قرار ندارد لذا این مجموعه تهی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس این مجموعه بی‌شمار عضو دارد و مجموعه تهی نیست.

۳) تنها مضرب اول هر عدد اولی خودش است، پس این گزینه، مجموعه $\{۳\}$ را معرفی می‌کند و تهی نیست.

۴) بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد حقیقی دیگر وجود دارد، پس این مجموعه بی‌شمار عضو دارد و مجموعهٔ تهی نیست.

---

۵ گزینهٔ «۱»؛ بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اعداد طبیعی دو رقمی حداکثر مقدار ۹۹ دارند، پس نمی‌توانند بیش از ۱۰۰ شمارنده داشته باشند.

۳) اعداد گویا دارای صورت و مخرج صحیح هستند، پس مجموع صورت و مخرج آنها عددی صحیح خواهد بود.

۴) هر عدد صحیحی یا زوج است یا فرد؛ بنابراین عدد صحیحی که نه زوج باشد و نه فرد وجود ندارد.

---

۶ گزینهٔ «۳»؛ می‌دانیم که $\{\ \}$ و $\varnothing$ نمادهای مجموعهٔ تهی هستند، پس با یکدیگر برابرند بنابراین: $\{\varnothing\} = \{\varnothing\ ,\ \varnothing\} = \{\varnothing\ ,\ \varnothing\}$ لذا این $A = \{\{\}\ ,\ \varnothing\}$ مجموعه یک عضو دارد.

---

۷ گزینهٔ «۲»؛ می‌دانیم $\{\ \} = \varnothing$ و $\{\{\ \}\} = \{\varnothing\}$ است، بنابراین:

$A = \{۰\ ,\ \varnothing\ ,\ \{\varnothing\ ,\ ۰\}\ ,\ \{\varnothing\}\}$

بنابراین مجموعهٔ A، ۴ عضو دارد.

---

۸ گزینهٔ «۲»؛ بررسی گزینه‌ها:

۱) $\{\ \}$ = عددهای طبیعی بین ۳- و ۴ -

۲) $\{۱\}$ = عددهای طبیعی که نه اول و نه مرکب هستند.

۳) $\{۲\ ,\ ۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\}$ = عددهای اول یک رقمی

۴) $\{\cdots, -۲۱, -۱۴, -۷, ۰, ۷, ۱۴, ۲۱, \cdots\}$ = مضرب‌های صحیح عدد ۷

بنابراین گزینهٔ «۲» نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ یک عضوی است.

---

۹ گزینهٔ «۱»؛ مجموعهٔ A فقط شامل یک عضو است که خود همین عضو، مجموعه عددهای طبیعی می‌باشد.

---

۱۰ گزینهٔ «۳»؛ آموختیم که در هر مجموعه عضو تکراری بی‌تأثیر است و باید عضوهای تکراری را حذف کنیم، بنابراین مجموعهٔ A را به‌صورت زیر می‌نویسیم که دارای ۶ عضو می‌باشد. $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$

---

۱۱ گزینهٔ «۲»

در عبارت‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و ... به عددهای ۱، ۲، ۳ و ... اندیس گفته می‌شود. با دقت در مجموعه‌ها ملاحظه می‌کنید که تعداد عضوهای هر مجموعه برابر اندیس آن مجموعه است. به‌طور مثال، مجموعهٔ $A_۱$ دارای یک عضو، مجموعه $A_۲$ دارای ۲ عضو و ... می‌باشد. به عبارت‌های زیر دقت کنید:

$n(A_۱) + n(A_۲) = ۱ + ۲ = ۳ \Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A_۲$

$n(A_۱) + n(A_۲) + n(A_۳) = ۱ + ۲ + ۳ = ۶ \Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A_۳$

اگر به‌همین ترتیب بتوانیم بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A_۹$ را تعیین کنیم، به سادگی مشخص می‌شود که مجموعهٔ $A_{۱۰}$ با چه عددی شروع می‌شود:

$$n(A_۱) + n(A_۲) + n(A_۳) + \cdots + n(A_۹) = \overbrace{۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۹}^{\text{تعداد}=۹}$$

$$= \frac{۹ \times ۱۰}{۲} = ۴۵$$

پس ۴۵ بزرگ‌ترین عضو مجموعه $A_۹$ است و کوچک‌ترین عضو $A_{۱۰}$ برابر عدد ۴۶ می‌باشد.

---

۱۲ گزینهٔ «۴»؛ روش اول: اگر علامت عددها را در نظر نگیریم، فاصلهٔ بین هر دو جملهٔ متوالی برابر ۵ است، پس داریم:

$\{۵ \times ۱ - ۳\ ,\ -(۵ \times ۲ - ۳)\ ,\ ۵ \times ۳ - ۳\ ,\ \cdots,\ ۵ \times ۴۱ - ۳\}$

همان‌طور که می‌بینید جملات با شمارهٔ فرد، مثبت هستند، بنابراین:

$۵(۳۱) - ۳ = ۱۵۵ - ۳ = ۱۵۲$ = عضو سی‌ویکم

روش دوم: عضوهایی که شماره آنها فرد است یعنی اولین عضو، سومین عضو، پنجمین عضو و...، عددهای زوج هستند پس گزینه‌های «۱» و «۲» حذف می‌شوند. از طرفی عضوهایی که شماره فرد هستند، عددهای مثبت می‌باشند، پس گزینهٔ «۳» هم حذف می‌شود.

---

۱۳ گزینهٔ «۱»؛ می‌دانیم که $۲^{۴۰۱} = ۲ \times ۲^{۴۰۰} = ۲^{۴۰۰} + ۲^{۴۰۰}$ است، بنابراین می‌توانیم مجموعهٔ A را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$A = \{۲^{۴۰۰}+۲, ۲^{۴۰۰}+۴, ۲^{۴۰۰}+۶, \dots, ۲^{۴۰۰}+۲^{۴۰۰}\}$$

حال اگر از تمام عضوها، عبارت $۲^{۴۰۰}$ را حذف کنیم، مجموعهٔ $B = \{۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۲^{۴۰۰}\}$ به دست می‌آید که نشان‌دهندهٔ عددهای زوج ۲ تا $۲^{۴۰۰}$ است و تعداد عضوهایش با مجموعهٔ A برابر می‌باشد، پس:

$$n(A) = ۲^{۴۰۰} \div ۲ = ۲^{۳۹۹}$$

---

۱۴ گزینهٔ «۴»

$$۲^{۱۰۱} = ۲^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰}$$

مجموعهٔ A را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \{۲^{۱۰۰}+۲^{۱}, ۲^{۱۰۰}+۲^{۲}, ۲^{۱۰۰}+۲^{۳}, \dots, ۲^{۱۰۰}+۲^{۱۰۰}\}$$

اگر از تمام عضوها، عبارت $۲^{۱۰۰}$ را کنار بگذاریم، مجموعه $B=\{۲^{۱}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, \dots, ۲^{۱۰۰}\}$ به دست می‌آید که تعداد عضوهایش با توجه به توان‌ها، برابر ۱۰۰ عضو است، پس مجموعهٔ A هم دارای ۱۰۰ عضو می‌باشد.

---

۱۵ گزینهٔ «۲»

در سال‌های قبل آموخته‌ایم که $(a^n)^m = a^{nm}$ است، بنابراین:

$$۲۷^{۲۵} = (۳^۳)^{۲۵} = ۳^{۷۵} \quad , \quad ۹^{۲۵} = (۳^۲)^{۲۵} = ۳^{۵۰}$$

همچنین اگر x مثبت و n عدد زوج باشد آنگاه $\sqrt{x^n} = x^{\frac{n}{۲}}$ است، در نتیجه $\sqrt{۳^{۱۰۰}} = ۳^{\frac{۱۰۰}{۲}} = ۳^{۵۰}$؛ با توجه به اینکه در هر مجموعه تکرار اعضا بی‌تأثیر است، داریم:

$$A = \{۳^{۵۰}, ۳^{۵۰}, ۳^{۵۰}, ۳^{۷۵}\} = \{۳^{۵۰}, ۳^{۷۵}\}$$

بنابراین: $n(A) = ۲$

---

۱۶ گزینهٔ «۲»

$\{۹۹, \dots, ۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ۱۰\}$ = مجموعهٔ اعداد طبیعی دورقمی

حالا اگر مجموع ارقام هر عدد را از خود عدد کم کنیم عضوهای مجموعه A به دست می‌آیند، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$A = \{۱۰-(۱+۰)=۹, ۱۱-(۱+۱)=۹, \dots, ۱۹-(۱+۹)=۹,$$
$$۲۰-(۲+۰)=۱۸, ۲۱-(۲+۱)=۱۸, \dots, ۲۹-(۲+۹)=۱۸,$$
$$۳۰-(۳+۰)=۲۷, ۳۱-(۳+۱)=۲۷, \dots, ۹۹-(۹+۹)=۸۱\}$$

به این ترتیب می‌بینید عضوهای مجموعهٔ A همان مضرب‌های طبیعی عدد ۹ و کوچک‌تر از ۱۰۰ هستند، بنابراین با حذف عضوهای تکراری داریم:

$$A = \{۹, ۱۸, ۲۷, \dots, ۸۱\} \Rightarrow n(A) = ۹$$

---

۱۷ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه $۵ \in M$، کافی است که هر یک از عضوهای مجموعهٔ M را برابر با ۵ قرار دهیم اما توجه داشته باشید که $۷ \notin M$ پس نباید هیچ‌یک از عضوهای مجموعه M برابر ۷ باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$۵ \in M \Rightarrow a = ۵ \quad , \quad a+۱ = ۵ \Rightarrow a = ۴ \quad , \quad a-۲ = ۵ \Rightarrow a = ۷ \quad ,$$
$$a+۳ = ۵ \Rightarrow a = ۲$$
$$۷ \notin M \Rightarrow a \neq ۷ \quad , \quad a+۱ \neq ۷ \Rightarrow a \neq ۶ \quad , \quad a-۲ \neq ۷ \Rightarrow a \neq ۹ \quad ,$$
$$a+۳ \neq ۷ \Rightarrow a \neq ۴$$

با مقایسه مقادیر به‌دست‌آمده نتیجه می‌شود که a نباید برابر با ۷ و یا ۴ باشد، پس a می‌تواند هر یک از مقادیر ۵ یا ۲ باشد.

---

۱۸ گزینهٔ «۴»

طبق نمودار وِن داده شده، عدد موردنظر باید مضرب ۷ و ۱۲ باشد ولی مضرب ۹ نباشد، بنابراین عددموردنظر باید حتماً بر سه عدد ۳، ۴ و ۷ بخش‌پذیر باشد، اما بر ۹ بخش‌پذیر نباشد که در بین گزینه‌ها فقط عدد ۱۶۸ چنین است.

---

۱۹ گزینهٔ «۳»

دو مجموعهٔ A و B زمانی برابر هستند که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد. به این ترتیب اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد، آنگاه هر دو مجموعه برابر هستند.

---

۲۰ گزینهٔ «۲»؛ با توجه به تساوی دو مجموعهٔ A و B نتیجه می‌شود که هر دو عضو مجموعهٔ A، برابر ۲ هستند:

$$\sqrt{n} = ۲ \Rightarrow n = ۴$$

$$m^۳ - \frac{n}{۲} = ۲ \xrightarrow{n=۴} m^۳ - \underbrace{\frac{۴}{۲}}_{۲} = ۲ \Rightarrow m^۳ = ۲+۲ = ۴$$

در فصل توان می‌آموزید که در هر عدد توان‌دار با معکوس کردن پایه، توان آن قرینه می‌شود، بنابراین:

$$(\frac{m}{n})^{-۳} = (\frac{n}{m})^۳ = \frac{n^۳}{m^۳} = \frac{۴^۳}{۴} = \frac{۶۴}{۴} = ۱۶$$

---

۲۱ گزینهٔ «۳»

با توجه به اینکه مجموعهٔ $\{y-۲\}$، یک عضوی است، پس باید هر دو عضو مجموعهٔ $\{x-۳, ۴x+۳\}$ با یکدیگر برابر باشند، بنابراین:

$$۴x+۳ = x-۳ \Rightarrow ۴x-x = -۳-۳ \Rightarrow ۳x = -۶ \Rightarrow x = \frac{-۶}{۳} = -۲$$

با جایگذاری $x = -۲$ در مجموعهٔ $\{x-۳, ۴x+۳\}$ نتیجه می‌شود که این مجموعه برابر $\{۴(-۲)+۳\} = \{-۵\}$ است، بنابراین باید $\{y-۲\} = \{-۵\}$ باشد:

$$y-۲ = -۵ \Rightarrow y = -۵+۲ = -۳$$

۲۲ گزینهٔ «۳»

دو مجموعه با یکدیگر برابرند، پس باید عضوهای هر دو مجموعه یکسان باشند. می‌دانیم حاصل عبارت‌های $\sqrt{b}$ و x^2 همواره نامنفی (یعنی صفر یا مثبت) است، بنابراین با توجه به مجموعهٔ $B=\{-2,4\}$ باید $x^2=4$ و $\sqrt{b}=4$ باشد، پس d هم برابر -2 می‌شود.

$$\sqrt{b}=4\Rightarrow b=16\quad,\quad x^2=4$$
$$x^2-b=4-16=-12$$

---

۲۳ گزینهٔ «۱»؛ با توجه به اینکه دو مجموعه برابرند، باید عضوهای هر دو مجموعه یکسان باشند، بنابراین:

$$\{x+y,5\}=\{x-y,13\}$$

$$\left.\begin{matrix}x+y=13\\x-y=5\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم.}]{\text{طرفین هر دو تساوی}}x+y+x-y=13+5\Rightarrow 2x=18$$
$$\Rightarrow x=\frac{18}{2}\Rightarrow x=9$$

حالا با جایگذاری $x=9$ در یکی از تساوی‌های $x+y=13$ یا $x-y=5$ مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$x+y=13\xrightarrow{x=9}9+y=13\Rightarrow y=13-9\Rightarrow y=4$$
$$\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$$

---

۲۴ گزینهٔ «۴»

$$\{2,5+y,-4\}=\{6,2x,3-y\}$$

با توجه به تساوی دو مجموعه، باید $5+y=6$ باشد، پس:

$$5+y=6\Rightarrow y=6-5\Rightarrow y=1$$

حال $y=1$ را در مجموعه‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$\{2,\underbrace{5+1}_{6},-4\}=\{6,2x,\underbrace{3-1}_{2}\}\Rightarrow 2x=-4\Rightarrow x=-2$$

بنابراین: $x+y=-2+1=-1$

---

۲۵ گزینهٔ «۴»؛ مجموعه‌های داده‌شده را با جایگذاری a و c به ترتیب به جای b و d می‌نویسیم:

مجموعه اصلی: $\{\{a\},\{a,b\},\{\{a,b,c\},a\}\}$

$=\{\{a\},\{a,a\},\{\{a,a,c\},a\}\}=\{\{a\},\{\{a,c\},a\}\}$

گزینهٔ «۱»: $\{\{a,b\},\{a,a\},\{\{a,c\},b,a\}\}$

$=\{\{a,a\},\{a,a\},\{\{a,c\},a,a\}\}=\{\{a\},\{\{a,c\},a\}\}$

گزینهٔ «۲»: $\{\{a\},\{a,b\},\{\{a,c\},a\}\}$

$=\{\{a\},\{a,a\},\{\{a,c\},a\}\}=\{\{a\},\{\{a,c\},a\}\}$

گزینهٔ «۳»: $\{\{a\},\{\{a,d\},b\}\}=\{\{a\},\{\{a,c\},a\}\}$

گزینهٔ «۴»: $\{\{a,c\},\{\{a\},a\}\}$

---

۲۶ گزینهٔ «۲»

$$\{4,\{x+2,k-1\},\{k\}\}=\{\{7,6\},\{x+2\},b+1\}$$

با مقایسهٔ عضوهای هر دو مجموعه نتیجه می‌شود که:

$$b+1=4\Rightarrow b=3$$
$$\{x+2\}=\{k\}\Rightarrow x+2=k$$
$$\{\underbrace{x+2}_{k},k-1\}=\{7,6\}\Rightarrow k=7$$
$$x+2=k\xrightarrow{k=7}x+2=7\Rightarrow x=5\Rightarrow x+k-b=\underbrace{5+7}_{12}-3=9$$

---

۲۷ گزینهٔ «۳»

تساوی عضو بدون { } دو مجموعه: $x+1=3\Rightarrow x=2$

تساوی یک عضو داخل { } دو مجموعه: $\{y+1\}=\{z\}\Rightarrow y+1=z$

تساوی دو عضو داخل { } دو مجموعه: $\{2,1\}=\{z-1,y+1\}$

$$\xrightarrow{z=y+1}\{2,1\}=\{y,y+1\}\Rightarrow y=1\xrightarrow{y+1=z}z=2$$
$$x+y+z=2+1+2=5$$

---

۲۸ گزینهٔ «۲»، مجموعهٔ $B=\{x,3\}$ دارای دو عضو است اما مجموعهٔ $A=\{y,8,z\}$ در ظاهر سه عضوی است، با توجه به تساوی این دو مجموعه، نتیجه می‌شود که مجموعهٔ $A=\{y,8,z\}$ نیز باید دارای دو عضو باشد، بنابراین در این مجموعه دو تا از عضوها برابر هستند. با توجه به تساوی دو مجموعه داریم: $\{x,3\}=\{y,8,z\}\Rightarrow x=8$

از طرفی برای اینکه مقدار عبارت $x+y-z$ بیشترین مقدار ممکن باشد باید $x=y=8$ و $z=3$ باشد، بنابراین: $x+y-z=8+8-3=13$

---

۲۹ گزینهٔ «۳»؛ اگر $y=1$ باشد، آنگاه $y^2=1$ خواهد شد و در نتیجه $B=\{1\}$ است، پس در مجموعهٔ A داریم: $x=1$ و در نتیجه $A=\{1\}$.

اگر $y^2=1$ باشد، آنگاه $y=+1$ و $y=-1$ خواهد شد که $y=1$ را در قسمت بالا بررسی کردیم حال اگر $y=-1$ باشد، آنگاه داریم:

$$B=\{(-1),(-1)^2\}=\{-1,+1\}$$

در نتیجه در مجموعهٔ A باید $x=-1$ باشد، به این ترتیب $x^2=(-1)^2=1$ خواهد شد و مجموعهٔ A هم شامل دو عضو $+1$ و -1 می‌شود و این مجموعه هم دوعضوی خواهد شد. $A=\{+1,-1\}$

پس طبق آنچه گفته شد، x می‌تواند $+1$ یا -1 باشد.

---

۳۰ گزینهٔ «۳»؛ با توجه به اینکه عبارت $(a+1)^2+1$ همواره مثبت و عبارت $-a^4$ (بخوانید: قرینه a^4) همواره نامثبت است پس $(a+1)^2+1=c$ می‌باشد، در نتیجه باید $(b-1)^3$ و $-a^4$ برابر -1 باشند. بنابراین:

$$(b-1)^3=-1=(-1)^3\Rightarrow b-1=-1\Rightarrow b=0$$
$$-a^4=-1\Rightarrow a^4=1\Rightarrow a=-1,a=1$$

$a=1\Rightarrow (a+1)^2+1=(1+1)^2+1=5\Rightarrow c=5\Rightarrow c^a=5^1=5$

$a=-1\Rightarrow (a+1)^2+1=(-1+1)^2+1=1\Rightarrow c=1\Rightarrow c^a=1^{-1}=1$

بنابراین فقط ادعای دوم درست است.

---

۳۱ گزینهٔ «۲»

عددهای ۱۳۲، ۲۳۱، ۲۱۳، ۳۱۲ و ۳۲۱ با عدد ۱۲۳ هم‌رقم هستند و به صورت $\{1,2,3\}$ خواهند بود. (جابه‌جایی اعضا تأثیری در مجموعه ندارد.)

---

۳۲ گزینهٔ «۲»

وقتی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ باشد، یعنی $A=B$ است؛ پس با توجه به تساوی مجموعه‌ها داریم:

$\{3,2x,2-y\}=\{4,2+y,1\}\Rightarrow 2+y=3\Rightarrow y=1$

حال $y=1$ را در مجموعه‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$\{3,2x,1\}=\{4,3,1\}\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$

بنابراین: $x+y=2+1=3$

---

۳۳ گزینهٔ «۳»

دقت کنید که عضوهای مجموعهٔ A عبارت‌اند از ۵، $\{4,3,2\}$ و $\{1\}$.

پس گزینهٔ «۳» صحیح است.

---

۳۴ گزینهٔ «۱»

مجموعهٔ A دارای ۴ عضو ۱، $\{1,2\}$، $\{1\}$ و $\{2\}$ است، پس: $\{2\}\in A$، $\{1\}\in A$، $\{1,2\}\in A$ و $1\in A$، بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» درست و گزینهٔ «۱» نادرست است.

دقت کنید $\{\{1,2\}\}\subseteq A$.

تذکر: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست.

---

۳۵ گزینهٔ «۱»

مجموعهٔ A دارای سه عضو است و داریم: $1\in A$, $\{1,2\}\in A$, $\{1\}\in A$

به این ترتیب اگر هر یک از این اعضا را داخل آکولاد قرار دهیم، به زیرمجموعه‌های تک عضوی تبدیل می‌شوند. در نتیجه داریم:

$\{1\}\subseteq A$, $\{\{1,2\}\}\subseteq A$, $\{\{1\}\}\subseteq A$

لذا عبارت‌های $\{1\}\in A$، $\{1\}\subseteq A$ و $\{\{1,2\},1\}\subseteq A$ درست هستند و عبارت $\{1,2\}\subseteq A$ نادرست است.

---

۳۶ گزینهٔ «۴»؛ مجموعه A دارای ۴ عضو a، b، $\{a\}$ و $\{a,b\}$ است.

لذا عبارت $\{b\}\in A$ نادرست است.

---

۳۷ گزینهٔ «۱»؛ مجموعه A دارای ۳ عضو $\varnothing$، $\{\varnothing\}$ و $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ است، پس عضو $\{\{\varnothing\}\}$ ندارد و اگر هر یک از این عضوها را داخل آکولاد قرار دهیم، به زیرمجموعه‌های تک عضوی تبدیل می‌شوند.

---

۳۸ گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}A=\{2\}\\ B=\{2,\{2\}\}\end{cases}\Rightarrow \{2\}\subseteq\{2,\{2\}\}\Rightarrow A\subseteq B$$

---

۳۹ گزینهٔ «۳»؛ بررسی گزینه‌ها:

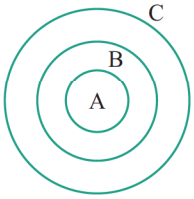
۱ و ۴) $n(A)=3$، پس این مجموعه ۳ عضوی است و نمی‌تواند با مجموعهٔ دوعضوی $\{3,1\}=\{3,1,1\}$ و یا مجموعه چهارعضوی $\{5,4,3,1\}$ برابر باشد.

۲) $2\notin A$، پس ۲ نمی‌تواند عضو این مجموعه باشد.

۳) $\{1\}\subseteq A$ در نتیجه $1\in A$ است، پس مجموعهٔ سه عضوی $\{5,20,1\}$ می‌تواند مجموعه A باشد.

---

۴۰ گزینهٔ «۲»؛ با فرض $A\subseteq B$ هر عضو A در مجموعه B قرار دارد و با فرض $B\subseteq C$ هر عضو B در مجموعه C قرار دارد پس هر عضو A در مجموعه C وجود دارد و $A\subseteq C$ خواهد بود. نمودار ون $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ نیز به صورت زیر است که نتیجه می‌دهد A داخل C قرار دارد یعنی $A\subseteq C$.



---

۴۱ گزینهٔ «۳»

مجموعهٔ M دارای دو عضو $\{\ \}$ و $\{\varnothing\}$ می‌باشد، پس برای این مجموعه باید چهار زیرمجموعه بنویسیم که به این ترتیب گزینهٔ «۳» درست است.

---

۴۲ گزینهٔ «۲»

مجموعهٔ B دارای ۲ عضو است، پس این مجموعه دارای 2^2 یعنی ۴ زیرمجموعه است. از طرفی مجموعه A دارای یک عضو است که خود این عضو، مجموعه‌ای ده‌عضوی است ولی این ده عضو تأثیری در تعداد عضوهای مجموعهٔ A ندارند و در نتیجه مجموعه تک‌عضوی A دارای $2^1=2$ زیرمجموعه است. پس تعداد زیرمجموعه‌های B، ۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های A است.

---

۴۳ گزینهٔ «۳»؛ می‌دانیم که اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر 2^n باشد، آن مجموعه دارای n عضو است پس ابتدا تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه A را به‌صورت توانی از ۲ می‌نویسیم تا بتوانیم تعداد عضوهایش را تعیین کنیم.

$256^5=(2^8)^5=2^{8\times5}=2^{40}\Rightarrow n(A)=40$

از طرفی آموختیم که هر مجموعه nعضوی دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعهٔ دوعضوی است، بنابراین:

تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی A $=\frac{40\times39}{2_1}=780$

۴۴ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که در مجموعه‌ها عضو تکراری بی‌تأثیر است، همچنین با جابه‌جایی عضوها، مجموعهٔ جدیدی حاصل نمی‌شود، از طرفی داریم:

$$۱\times۳\times۱۵=۱\times۵\times۹=۴۵$$

بنابراین فقط مجموعه‌های $\{۱,۳,۱۵\}$ و $\{۱,۵,۹\}$ زیرمجموعه‌های سه‌عضوی موردنظر هستند. توجه داشته باشید که مجموعه‌هایی مانند $\{۳,۳,۵\}$ دارای دو عضو هستند زیرا باید یکی از عضوهای تکراری آنها را حذف کنیم.

---

۴۵ گزینهٔ «۲»

چون $A\subseteq B$ است، پس باید عضو $\{۱,۲a+b\}$ از مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B باشد، بنابراین:

$$\{۱,۲a+b\}=\{-a,۰\}$$

حالا با توجه به تساوی دو مجموعهٔ بالا در ابتدا مقدار a، سپس مقدار b را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases}-a=۱\Rightarrow a=-۱\\ ۲a+b=۰\xrightarrow{a=-۱}۲(-۱)+b=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

---

۴۶ گزینهٔ «۳»؛ می‌دانیم که $۲^{۱۳۹۱}=۲\times۲^{۱۳۹۰}=۲^{۱۳۹۰}+۲^{۱۳۹۰}$ پس مجموعهٔ داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{۲^{۱۳۹۰}+۲^{۱۳۹۰},۲^{۱۳۹۰}+۲^{۲},۲^{۱۳۹۰}+۲^{۳},\ldots,۲^{۱۳۹۰}+۲^{۱۳۹۰}\}$$

حالا اگر در تمامی عضوهای مجموعهٔ بالا $۲^{۱۳۹۰}$ را کنار بگذاریم، مجموعهٔ $\{۲^{۱},۲^{۲},۲^{۳},\ldots,۲^{۱۳۹۰}\}$ به دست می‌آید که تعداد عضوهایش با توجه به توان‌ها برابر ۱۳۹۰ عضو است و این تعداد با تعداد عضوهای مجموعهٔ داده شده برابر است، پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ موردنظر $۲^{۱۳۹۰}$ می‌باشد.

---

۴۷ گزینهٔ «۲»؛ اختلاف دو عضو باید دو واحد باشد، بنابراین تمام مجموعه‌های دو عضوی ممکن را می‌نویسیم که عبارت‌اند از:

$$\{۱,۳\},\{۲,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۶\},\ldots,\{۹۷,۹۹\}$$

با توجه به کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ها که به ترتیب ۱، ۲، ۳، ... و ۹۷ هستند، تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر ۹۷ زیرمجموعه می‌باشد.

---

۴۸ گزینهٔ «۲»

برای پاسخ به این سؤال یک مجموعه کوچک‌تر مانند $A=\{۱,۲,۳\}$ که در آن مجموع عضوها برابر $۱+۲+۳=۶$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم حالا تمام زیرمجموعه‌هایش را می‌نویسیم:

زیرمجموعه‌های A: $\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در چهار تا از زیرمجموعه‌ها عضو ۱، در چهارتا از آنها عضو ۲ و در چهار تا هم عضو ۳ وجود دارد، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر عضو A در $۲^{۳-۱}$ یعنی ۴ زیرمجموعه دیده می‌شود و مجموع عضوهای تمام زیرمجموعه‌هایش برابر $۶\times۲^{۳-۱}$ می‌باشد.

حالا به نکتهٔ زیر دقت کنید:

نکته: هر عضو دلخواه از مجموعهٔ n عضوی مانند A، در $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه وجود دارد پس اگر مجموع عضوهای A برابر M باشد، مجموع تمام عضوهای زیرمجموعه‌های A برابر $M\times۲^{n-۱}$ خواهد شد.

طبق نکتهٔ بالا، چون مجموع عضوهای مجموعه A برابر ۴۰ و $n(A)=۶$ می‌باشد، پس:

$$\text{مجموع عضوهای تمام زیرمجموعه‌های A}=۲^{۶-۱}\times۴۰=۳۲\times۴۰=۱۲۸۰$$

---

۴۹ گزینهٔ «۲»

اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد این مجموعه دارای ۲^{n} زیرمجموعه خواهد بود حال اگر دو عضو جدید به آن اضافه کنیم، تعداد عضوهایش $n+۲$ و تعداد زیرمجموعه‌هایش $۲^{n+۲}$ خواهد شد از طرفی چون به تعداد زیرمجموعه‌ها ۹۶ واحد اضافه شده بنابراین $۲^{n+۲}-۲^{n}=۹۶$ می‌باشد، حال با حل این معادله توانی و یا با امتحان گزینه‌ها به جواب می‌رسیم.

روش اول: (امتحان گزینه‌ها):

گزینهٔ «۱»: $n=۴\Rightarrow ۲^{۴+۲}-۲^{۴}=۶۴-۱۶=۴۸\neq۹۶$

گزینهٔ «۲»: $n-۵\Rightarrow ۲^{۵+۲}-۲^{۵}-۱۲۸-۳۲-۹۶\rightarrow$ جواب

روش دوم: (روش جبری):

$$۲^{n+۲}-۲^{n}=۹۶\Rightarrow ۲^{n}\times۲^{۲}-۲^{n}=۹۶\Rightarrow ۴\times۲^{n}-۲^{n}=۹۶$$

$$\Rightarrow ۳\times۲^{n}=۹۶\Rightarrow ۲^{n}=\frac{۹۶}{۳}=۳۲=۲^{۵}\Rightarrow n=۵$$

---

۵۰ گزینهٔ «۲»

در این سؤال هم مانند سؤال قبلی می‌توانیم به دو روش عمل کنیم، در اینجا روش جبری را انجام می‌دهیم و امتحان گزینه‌ها به عهدهٔ شما عزیزان می‌باشد.

تعداد زیرمجموعه‌ها $=۲^{k}\Rightarrow$ مجموعه k عضو دارد.

تعداد زیرمجموعه‌ها $=۲^{k+۱}=۲^{k}\times۲^{۱}\Rightarrow$ مجموعه $k+۱$ عضو دارد.

$$(۲^{k}\times۲^{۱})+۲^{k}=۴۸\Rightarrow ۲^{k}\underbrace{(۲+۱)}_{۳}=۴۸\Rightarrow ۲^{k}=\frac{۴۸}{۳}=۱۶=۲^{۴}$$

پس $k=۴$ می‌باشد.

---

۵۱ گزینهٔ «۳»

می‌دانیم که هر مجموعهٔ n عضوی دارای یک زیرمجموعهٔ تهی، n زیرمجموعهٔ یک عضوی و $\frac{n(n-۱)}{۲}$ زیرمجموعهٔ دوعضوی است. از طرفی مجموعهٔ A دارای ۱۰ عضو است پس این مجموعه دارای $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ زیرمجموعه می‌باشد که از این تعداد یک زیرمجموعهٔ تهی، ۱۰ زیرمجموعهٔ یک عضوی و $\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$ زیرمجموعهٔ دوعضوی داریم، بنابراین:

تعداد زیرمجموعه‌های دارای حداقل ۳ عضو $=۱۰۲۴-(۱+۱۰+۴۵)$

$$=۱۰۲۴-۵۶=۹۶۸$$

۵۲ گزینهٔ «۲»؛ زیرمجموعهٔ ۶ عضوی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ از مجموعهٔ A را درنظر بگیرید با این مجموعه می‌توانیم $۲^۶$ یعنی ۶۴ زیرمجموعه بسازیم که اگر به هر یک از این زیرمجموعه‌ها عضو ۷ را هم اضافه کنیم، تمامی زیرمجموعه‌هایی از A که بزرگ‌ترین عضوشان ۷ می‌باشد، به‌دست می‌آید.

---

۵۳ گزینهٔ «۲»؛ ابتدا در این مجموعه عضو a را کنار می‌گذاریم تا مجموعهٔ $\{\{b\},\{a\},b\}$ به‌دست آید. حالا تمام زیرمجموعه‌های آن را می‌نویسیم، چون این مجموعه دارای ۳ عضو می‌باشد، پس تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر $۲^۳$ یعنی ۸ زیرمجموعه است. حالا به تمام زیرمجموعه‌ها عضو a را اضافه می‌کنیم، به این ترتیب ۸ زیرمجموعه حتماً دارای عضو a خواهند شد.

---

۵۴ گزینهٔ «۲»؛ در این سؤال هم مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم. ابتدا از مجموعهٔ A، عضوهای ۲ و ۵ را کنار می‌گذاریم تا مجموعهٔ ۴ عضوی $\{۱,۳,۴,۶\}$ به دست آید. حالا تمام زیرمجموعه‌های این مجموعهٔ چهارعضوی را می‌نویسیم که $۲^۴$ یعنی ۱۶ زیرمجموعه می‌شود حالا به تمام این ۱۶ زیرمجموعه، عضوهای ۲ و ۵ را اضافه می‌کنیم.

---

۵۵ گزینهٔ «۴»

ابتدا در مجموعهٔ A، عضوهای a و b را کنار می‌گذاریم تا مجموعهٔ چهارعضوی $\{c,d,e,f\}$ به دست آید، حالا تمام زیرمجموعه‌های این مجموعهٔ چهارعضوی که $۲^۴$ یعنی ۱۶ زیرمجموعه می‌باشد را می‌نویسیم و به تمام آنها فقط عضو a را اضافه می‌کنیم.

---

۵۶ گزینهٔ «۱»

ابتدا در این مجموعه، عضوهای ۴، ۵ و ۷ را کنار می‌گذاریم تا مجموعهٔ ۴ عضوی $\{۱,۲,۳,۶\}$ به دست آید. حالا تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی این مجموعه را می‌نویسیم و به تمام آنها فقط عضو ۴ را اضافه می‌کنیم.

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است، پس این مجموعه $\frac{۴\times۳}{۲}=۶$ زیرمجموعهٔ دوعضوی دارد.

---

۵۷ گزینهٔ «۲»

زیرمجموعه حداکثر ۵ عضوی از A که شامل ۱، ۲ و ۳ باشد سه صورت دارد:

۱- زیرمجموعه ۳ عضوی باشد که فقط یک حالت $\{۱,۲,۳\}$ دارد.

۲- زیرمجموعه ۴ عضوی باشد یعنی از بین ۱۵ عضو ۴، ۵ و ... و ۱۸ فقط یک عضو دیگر کنار ۱، ۲، ۳ قرار بگیرد که به تعداد زیر مجموعه یک عضوی از اعضای باقیمانده یعنی ۱۵ حالت امکان‌پذیر است.

۳- زیر مجموعه ۵ عضوی باشد یعنی از بین ۱۵ عضو ۴، ۵ و ... و ۱۸ فقط دو عضو دیگر در کنار ۱، ۲، ۳ قرار بگیرد که به تعداد زیر مجموعه ۲ عضوی از اعضای باقیمانده یعنی $\frac{۱۵\times۱۴}{۲}=۱۰۵$ حالت امکان‌پذیر است.

کل حالات: $۱+۱۵+۱۰۵=۱۲۱$

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی و دو عضوی یک مجموعه n عضوی به ترتیب n و $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است.

---

۵۸ گزینهٔ «۳»

روش اول: مجموعهٔ A شامل تمامی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ده‌عضوی $\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰\}$ می‌باشد که حتماً عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ عضوهای آنها باشند، پس این ۴ عضو را کنار می‌گذاریم و با ۶ عضو باقیمانده یعنی $\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۰\}$، $۲^۶$ یعنی ۶۴ زیرمجموعه می‌نویسیم حالا اگر به تمام این ۶۴ زیرمجموعه، تمامی عضوهای ۲، ۴، ۶ و ۸ را اضافه کنیم تمام مجموعه‌هایی که می‌توانیم به‌جای A قرار دهیم به دست می‌آیند.

روش دوم: نکته: تعداد مجموعه‌هایی که در رابطهٔ $X\subseteq A\subseteq Y$ صدق می‌کنند از رابطهٔ $۲^{n(Y)-n(X)}$ به دست می‌آیند.

طبق نکتهٔ بالا $n(X)=۴$ و $n(Y)=۱۰$ می‌باشد، پس $۲^{۱۰-۴}=۲^۶=۶۴$ مجموعه می‌توانیم به‌جای A قرار دهیم.

---

۵۹ گزینهٔ «۲»

روش اول: مجموعهٔ C شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است که حتماً عددهای ۵ و ۲ عضوهای آنها باشند، پس این دو عضو را کنار می‌گذاریم و با ۳ عضو باقیمانده یعنی $\{۱,۳,۴\}$، $۸=۲^۳$ زیرمجموعه می‌نویسیم. حالا اگر به تمام این ۸ زیرمجموعه، عضوهای ۲ و ۵ را اضافه کنیم، تمام مجموعه‌هایی که می‌توانیم به جای C قرار دهیم، به دست می‌آید.

توجه: طبق نکتهٔ درسنامه، مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ دارای ۵ عضو است که می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی را مشخص کنیم که حتماً شامل عضوهای ۲ و ۵ هستند، بنابراین تعداد این مجموعه‌ها برابر $۸=۲^۳=۲^{۵-(۲+۰)}$ می‌باشد.

روش دوم: طبق نکتهٔ سؤال قبل $n(X)=۲$ و $n(Y)=۵$ می‌باشد، پس $۸=۲^۳=۲^{۵-۲}$ مجموعه می‌توانیم به جای C قرار دهیم.

---

۶۰ گزینهٔ «۲»

کافی است که تعداد تمامی زیرمجموعه‌های A که حتماً شامل عضوهای ۱ و ۱۰ هستند را تعیین کنیم برای این منظور می‌توانیم به یکی از دو روش زیر عمل کنیم:

روش اول: عضوهای ۱ و ۱۰ را از مجموعه A کنار بگذاریم تا مجموعه هشت عضوی $\{۲,۳,۴,\cdots,۹\}$ به دست آید. حالا تمامی زیرمجموعه‌های این مجموعه را که تعداد آنها $۲^۸$ زیرمجموعه می‌باشد بنویسیم و در تمامی آنها عضوهای ۱ و ۱۰ را اضافه کنیم.

روش دوم: با توجه به نکتهٔ درسنامه، در مجموعه ۱۰ عضوی A به تعداد $۲^{۱۰-۲}$ یعنی $۲^۸$ زیرمجموعه، حتماً شامل عضوهای ۱ و ۱۰ هستند.

۶۱ گزینهٔ «۳»

می‌دانیم که $۱۱=۱+۱۰$ می‌باشد، در ابتدا تعداد تمام زیرمجموعه‌های A که شامل عضوهای ۱ و ۱۰ می‌باشند را حساب می‌کنیم که برابر $۲^۸$ زیرمجموعه می‌باشد. از طرفی $۱۱=۲+۹$ است، در اینجا هم تعداد تمام زیرمجموعه‌های A که شامل عضوهای ۲ و ۹ هستند ولی ۱ و ۱۰ را ندارند حساب می‌کنیم که برابر $۲^۶$ زیرمجموعه می‌باشد. همچنین $۱۱=۸+۳$ است، باز هم تعداد زیرمجموعه‌های A که شامل ۳ و ۸ هستند اما عضوهای ۱، ۲، ۹ و ۱۰ را ندارند حساب می‌کنیم که برابر $۲^۴$ زیرمجموعه می‌باشد. از طرفی $۱۱=۷+۴$ می‌باشد و تعداد زیرمجموعه‌های A که شامل ۴ و ۷ هستند اما عضوهای ۱، ۲، ۳، ۸، ۹ و ۱۰ را ندارند حساب می‌کنیم که برابر $۲^۲$ یعنی ۴ زیرمجموعه است و در آخر می‌دانیم که $۱۱=۶+۵$ است و فقط مجموعه $\{۵,۶\}$ وجود دارد که شامل ۵ و ۶ می‌باشد و هیچ عضو دیگری ندارد. بنابراین در کل به تعداد $۳۴۱=۱+۲^۲+۲^۴+۲^۶+۲^۸$ زیرمجموعه وجود دارند که مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آنها ۱۱ می‌باشد.

---

۶۲ گزینهٔ «۳»؛ با توجه به اینکه دقیقاً در ۳ زیرمجموعهٔ دو عضوی A هر دو عضو آن اول هستند، پس ۳ تا از عضوهای مجموعهٔ A عدد اول هستند. از آن‌جایی که مجموعهٔ A، ۱۵ زیرمجموعهٔ غیرتهی دارد (بدون احتساب آن سه عضو که اول هستند)، پس با اضافه کردن مجموعهٔ تهی (۱۶زیرمجموعه) می‌توانیم تعداد اعضای آن را پیدا کنیم: $۱۶=۲^n \Rightarrow ۲^۴=۲^n \Rightarrow n=۴$

پس مجموعهٔ A دارای $۷=۴+۳$ عضو است.

می‌توانید مجموعهٔ A را به صورت $\{۸,۶,۵,۴,۳,۲,۱\}$ در نظر بگیرید.

---

۶۳ گزینهٔ «۱»

$\{۹,\cdots,۴,۳,۲,۱\}=$ مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی

$\Rightarrow$ تعداد کل زیرمجموعه $=۲^۹=۵۱۲$

حالا با اعداد طبیعی یک رقمی غیر اول مجموعهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم و تعداد تمامی زیرمجموعه‌های آن را مشخص می‌کنیم.

$\{۹,۸,۶,۴,۱\}=$ مجموعه اعداد طبیعی غیراول یک‌رقمی

$\Rightarrow$ تعداد کل زیرمجموعه‌ها $=۲^۵=۳۲$

در تمام این ۳۲ زیرمجموعه، هیچ عدد اولی دیده نمی‌شود که اگر این تعداد را از ۵۱۲ کم کنیم تعداد زیرمجموعه‌هایی که حداقل یک عضو اول دارند، مشخص می‌شود: $۵۱۲-۳۲=۴۸۰$

---

۶۴ گزینهٔ «۳»؛ کافی است زیرمجموعه‌های ۶عضوی، ۵عضوی و ۴عضوی مجموعهٔ A را در نظر بگیریم. تعداد زیرمجموعه‌های ۶عضوی، فقط خود A است؛ تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی و ۴عضوی به ترتیب مثل تعداد زیر مجموعه‌های ۱عضوی (یعنی $n=۶$) و ۲عضوی (یعنی $\frac{n(n-۱)}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$) است؛ بنابراین: $۱+۶+۱۵=۲۲$

---

۶۵ گزینهٔ «۴»؛ زیر مجموعه‌های $\varnothing$، $\{۳,۱\}$، $\{۲,۷,۳,۱\}$، $\{۴,۲,۷,۳,۱\}$، $\{۵,۴,۲,۷,۳,۱\}$ و $\{۶,۵,۴,۲,۷,۳,۱\}$ به همراه ۲ مجموعه داده‌شده، تشکیل یک زنجیر می‌دهند.

تذکر: در نوشتن زیرمجموعه‌ها می‌توانستیم به جای $\{۳,۱\}$، $\{۷,۱\}$ را در نظر بگیریم.

---

۶۶ گزینهٔ «۱»؛ در گزینهٔ «۱» دو ورزشکار مشهدی به صورت سلیقه‌ای انتخاب می‌شوند بنابراین این عبارت نمی‌تواند نمایش یک مجموعه باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) از نمودار وِن برای نمایش مجموعه استفاده کرده است.

۳) $\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\geq۷\}=\{۷,۸,۹,\cdots\}$ است، بنابراین یک مجموعه را نمایش می‌دهد.

۴) یک مجموعه با سه عضو ۱، ۲ و $\{۱,۲\}$ است.

---

۶۷ گزینهٔ «۲»

در سال‌های قبل با محاسبهٔ مقدار تقریبی جذر عددها آشنا شده‌اید و آموختید که $\sqrt{۲}\simeq۱/۴$ و $\sqrt{۳}\simeq۱/۷$. حالا در مجموعهٔ A با توجه به اینکه $x\in\mathbb{N}$ و $۱/۴\leq x\leq۱/۷$ است، خواهیم داشت $A=\{\}$، پس A فقط یک زیرمجموعه (تهی) دارد. در مجموعهٔ B با توجه به اینکه $x\in\mathbb{Z}$ و $-۱/۴<x<۰$ می‌باشد خواهیم داشت $B=\{-۱\}$، پس B دو زیرمجموعه دارد. در مجموعه C با توجه به اینکه $x\in\mathbb{Q}'$ و با توجه به اینکه بین هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد گنگ دیگر وجود دارد پس مجموعه C دارای بی‌شمار عضو و بی‌شمار زیرمجموعه است.

بنابراین فقط مجموعه A دارای یک زیرمجموعه است.

تذکر: به اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۲/۱۱}$، $\sqrt{۲/۵}$، $\sqrt{۳}$ و ... که مقدار دقیق اعشاری ندارند و حاصل آنها با هیچ عدد گویایی برابر نیست عدد گنگ می‌گوییم.

---

۶۸ گزینهٔ «۲»؛ در مجموعهٔ B، باید اعدادی بین ۵+ و ۵- را بنویسیم که مجذور آنها صحیح باشد $(x^۲\in\mathbb{Z})$، بنابراین:

$$B=\{x\,|\,x^۲\in\mathbb{Z},-۵<x<۵\}$$

$$=\{\pm\sqrt{۱},\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳},\cdots,\pm\sqrt{۲۴}\}\Rightarrow n(B)=۴۸$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $A=\{۲x+۱۳۹۹\,|\,\overbrace{x\in\mathbb{N},x<۳}^{x=۱,۲}\}=\{۲\times۱+۱۳۹۹,۲\times۲+۱۳۹۹\}$

$$=\{۱۴۰۱,۱۴۰۳\}\Rightarrow n(A)=۲$$

۳) $C=\{\frac{x}{۲}\,|\,\overbrace{\sqrt{x}\in\mathbb{N},x^۲<۱۰۰}^{x=۱,۴,۹}\}=\{\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۲},\frac{۹}{۲}\}\Rightarrow n(C)=۳$

۴) $D=\{۲x\,|\,\overbrace{x\in\mathbb{N},x<۲۵}^{x=۱,۲,۳,\cdots,۲۴}\}=\{۲\times۱,۲\times۲,۲\times۳,\cdots,۲\times۲۴\}$

$$=\{۲,۴,۶,\cdots,۴۸\}\Rightarrow n(D)=۲۴$$

۶۹ گزینهٔ «۲»

باید توجه داشته باشید که اعداد منفی جذر ندارند، از طرفی وقتی $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$، یعنی باید x مجذور کامل باشد، پس باید $x = ۱, ۴, ۹, ۱۶, \cdots$ باشد.

---

۷۰ گزینهٔ «۱»؛ با توجه به اینکه تمام عضوهای مجموعهٔ A، عدد اول کوچک‌تر از $\sqrt{۸۰۰۰}$ هستند پس حتماً A زیرمجموعه‌ای از P است، در نتیجه $A \subseteq P$ درست است.

---

۷۱ گزینهٔ «۳»؛ با توجه به اینکه x و y عددهای صحیح هستند و با استفاده از جدول زیر تمام حالت‌های ممکن برای x و y را تعیین می‌کنیم.

x	۱	۲	۴	۸	-۱	-۲	-۴	-۸
y	۸	۴	۲	۱	-۸	-۴	-۲	-۱

حالا تمام x^y ها را حساب می‌کنیم و به‌عنوان عضو A قرار می‌دهیم، توجه داشته باشید که عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم.

$$A = \{۱^۸, ۲^۴, ۴^۲, ۸^۱, (-۱)^{-۸}, (-۲)^{-۴}, (-۴)^{-۲}, (-۸)^{-۱}\}$$
$$= \{۱, ۱۶, ۸, \frac{۱}{۱۶}, -\frac{۱}{۸}\}$$

مجموعهٔ A دارای ۵ عضو است، پس این مجموعه دارای $\frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰$ زیرمجموعهٔ دو عضوی می‌باشد.

---

۷۲ گزینهٔ «۲»؛ با توجه به شرط‌های داده‌شده برای مجموعه، تمامی عددهای صحیح ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲ را برای x انتخاب می‌کنیم و در رابطهٔ $\sqrt{x^۲+۱}$ به‌جای آن قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(-۲)^۲+۱} = \sqrt{۵}\ ,\ \sqrt{(-۱)^۲+۱} = \sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۰^۲+۱} = ۱$$
$$,\ \sqrt{۱^۲+۱} = \sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲^۲+۱} = \sqrt{۵}$$

$$A = \{\sqrt{۵}, \sqrt{۲}, ۱\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است، پس این مجموعه $۲^۳$ یعنی ۸ زیرمجموعه دارد.

---

۷۳ گزینهٔ «۱»

باید برای x عددهای صحیحی را انتخاب کنیم که وقتی ۳ واحد از آنها کم می‌کنیم و بعد عدد حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم، حاصل عددی بین ۱۰ تا ۱۰۰ شود. به این ترتیب تمامی عددهای $-۶, -۵, \cdots, -۱, ۷, ۸, \cdots, ۱۱, ۱۲$ را می‌توانیم برای x انتخاب کنیم.

توجه داشته باشید که اگر $x = -۶$ و یا $x = ۱۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$۱۰ < (-۶-۳)^۲ = (۱۲-۳)^۲ = ۸۱ < ۱۰۰$$

حالا مجموعهٔ A را با عضوهایش نمایش می‌دهیم:

$$A = \{-۶, -۵, -۴, -۳, -۲, -۱, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$$

مجموع عضوهای A $= -۶+(-۵)+(-۴)+(-۳)+(-۲)+(-۱)+$
$۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲ = -۲۱+۵۷ = +۳۶$

---

۷۴ گزینهٔ «۲»؛ ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le ۲۰\} = \{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲۰\}$$
$$B = \{۳x-۷ \mid x \in A\} = \{۳(۱)-۷, ۳(۲)-۷, ۳(۳)-۷, \cdots, ۳(۲۰)-۷\}$$
$$= \{-۴, -۱, ۲, ۵, \cdots, ۵۳\}$$

چون B زیرمجموعهٔ A است، پس از بین عددهای بالا عضوهایی را انتخاب می‌کنیم که عضو A هم باشند. بنابراین:

$$B = \{۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰\} \Rightarrow n(B) = ۷$$

---

۷۵ گزینهٔ «۲»؛ ابتدا باید تمامی xهای ممکن را تعیین کنیم:

$$-۴ \le ۲x \le ۲ \xrightarrow{\div ۲} -۲ \le x \le ۱ \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -۲, -۱, ۰, ۱$$

چون $xy = ۱۲$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱۲ \end{cases}, \begin{cases} x = -۱ \\ y = -۱۲ \end{cases}, \begin{cases} x = -۲ \\ y = -۶ \end{cases}$$

حالا مجموعهٔ A را با عضوهایش می‌نویسیم:

$$A = \{۲^{۳(-۲)+(-۶)}, ۲^{۳(-۱)+(-۱۲)}, ۲^{۳(۱)+۱۲}\} = \{۲^{-۱۲}, ۲^{-۱۵}, ۲^{۱۵}\}$$

مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است، پس این مجموعه دارای $۲^۳$ یعنی ۸ زیرمجموعه می‌باشد.

---

۷۶ گزینهٔ «۴»

ابتدا تمامی عددهای صحیح ممکن را که وقتی از مجذور آنها یک واحد کم کنیم، کوچک‌تر از ۱۸ می‌شوند، تعیین می‌کنیم:

$$x^۲ - ۱ < ۱۸ \Rightarrow x^۲ < ۱۸+۱ \Rightarrow x^۲ < ۱۹$$
$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

می‌دانیم که $(-۴)^۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$، $(-۳)^۴ = ۳^۴ = ۸۱$، $(-۲)^۴ = ۲^۴ = ۱۶$، $(-۱)^۴ = ۱^۴ = ۱$ و $۰^۴ = ۰$ می‌باشند، بنابراین:

$$A = \{۵\times۲۵۶-۳, ۵\times۸۱-۳, ۵\times۱۶-۳, ۵\times۱-۳, ۵\times۰-۳\}$$
$$= \{۱۲۷۷, ۴۰۲, ۷۷, ۲, -۳\} \Rightarrow n(A) = ۵$$

---

۷۷ گزینهٔ «۳»؛ ابتدا عضوهای مجموعهٔ A را تعیین می‌کنیم:

$$A = \{-x^۲+۱ \mid \overbrace{x \in \mathbb{Z}, -۲ \le x < ۳}^{x = -۲, -۱, ۰, ۱, ۲}\}$$
$$= \{-(-۲)^۲+۱ = -(+۲)^۲+۱ = -۳, -(-۱)^۲+۱$$
$$= -(+۱)^۲+۱ = ۰, -۰^۲+۱ = ۱\} \Rightarrow A = \{-۳, ۰, ۱\}$$

عضوهای مجموعهٔ B، قرینه مکعب عضوهای A هستند، بنابراین:

$$B = \{-(-۳)^۳, -(۰)^۳, -(۱)^۳\} = \{+۲۷, ۰, -۱\}$$

---

۷۸ گزینهٔ «۴»؛ صورت کسرها عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... و مخرج هر کسر یک واحد بیشتر از صورت آن می‌باشد، بنابراین می‌توانیم مجموعه را به‌صورت $\{\frac{a}{a+۱} \mid a \in \mathbb{N}\}$ بنویسیم که این مجموعه با مجموعهٔ $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, b = a+۱\}$ برابراست.

۷۹ گزینهٔ «۲»

$$A=\{۲^{۰}-۱, ۲^{۱}-۱, ۲^{۲}-۱, ۲^{۳}-۱, \dots\}=\{۲^{x}-۱ \mid x \in \mathbb{W}\}$$

---

۸۰ گزینهٔ «۱»؛ با توجه به اینکه $x \in \mathbb{N}$ و $x \leq ۳$ می‌باشد، بنابراین x برابر عددهای ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. حالا با جایگذاری این مقادیر به جای x، اعضای این مجموعه را می‌نویسیم: $\{۱-۱, ۲-۱, ۳-۱\}=\{۰, ۱, ۲\}$

---

۸۱ گزینهٔ «۱»؛ با توجه به اینکه باید $\frac{x}{۲}$ عددی طبیعی باشد، پس باید x عددی زوج باشد از طرفی $۱<x<۸$ است، بنابراین می‌توانیم عددهای ۲، ۴ و ۶ را برای x درنظر بگیریم. حالا مجموعهٔ A را با اعضایش نمایش می‌دهیم.

$$A=\{۲^{۳}, ۴^{۳}, ۶^{۳}\}=\{۸, ۶۴, ۲۱۶\}$$

---

۸۲ گزینهٔ «۴»؛ هر یک از مجموعه‌ها را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم تا مجموعهٔ تهی را تعیین کنیم:

۱) $A=\{\sqrt{-x} \mid \overbrace{x \in \mathbb{Z}, x \leq ۰}^{x=۰,-۱,-۲,\dots}\}$

$$=\{\sqrt{-۰}, \sqrt{-(-۱)}, \sqrt{-(-۲)}, \sqrt{-(-۳)}, \dots\}$$

$$=\{۰, ۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \dots\}$$

۲) می‌دانیم که هر عددی (به غیر از صفر) به توان صفر برابر ۱ می‌شود.

$$۲^{۰}=۵^{۰}=۱ \Rightarrow B=\{۰\}$$

۳) عددهای صحیحی عضو مجموعه C هستند که قرینه آنها از خودشان بزرگ‌تر است، پس: $C=\{-۱, -۲, -۳, \dots\}$

۴) می‌دانیم که مجذور هر عددی همواره نامنفی است یعنی $x^{۲} \geq ۰$ می‌باشد، حالا اگر یک واحد به $x^{۲}$ اضافه کنیم آنگاه: $x^{۲}+۱>۰$ پس $x^{۲}+۱$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، به عبارت دیگر هیچ عددی وجود ندارد که یک واحد بیشتر از مجذور آن، مساوی صفر شود. پس این مجموعه تهی می‌باشد؛ یعنی: $D=\{\ \}$.

---

۸۳ گزینهٔ «۴»

$$A=\{۷\times۱, ۷\times۱۱, ۷\times۱۱۱, \dots\}=\{۷\times\frac{۹}{۹}, ۷\times\frac{۹۹}{۹}, ۷\times\frac{۹۹۹}{۹}, \dots\}$$

$$=\{۷\times\frac{۱۰^{۱}-۱}{۹}, ۷\times\frac{۱۰^{۲}-۱}{۹}, ۷\times\frac{۱۰^{۳}-۱}{۹}, \dots\}=\{۷\times\frac{۱۰^{x}-۱}{۹} \mid x \in \mathbb{N}\}$$

---

۸۴ گزینهٔ «۳»

می‌دانیم که مجذور هر عددی همواره نامنفی است بنابراین $(-n)^{۲} \geq ۰$ است پس در گزینهٔ «۳» تمامی عضوها باید نامنفی باشند. بنابراین عضوهای این مجموعه اشتباه نوشته شده‌اند و باید به‌صورت زیر باشند:

$$\{(-n)^{۲} \mid \overbrace{n \in \mathbb{N}, ۹<n<۱۵}^{n=۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴}\}$$

$$=\{(-۱۰)^{۲}, (-۱۱)^{۲}, (-۱۲)^{۲}, (-۱۳)^{۲}, (-۱۴)^{۲}\}$$

$$=\{۱۰۰, ۱۲۱, ۱۴۴, ۱۶۹, ۱۹۶\}$$

۸۵ گزینهٔ «۳»

$$\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots\}=\{۱\times۲, ۲\times۳, ۳\times۴, ۴\times۵, \dots\}$$

$$=\{n(n+۱) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

---

۸۶ گزینهٔ «۲»

$x=\frac{k \div k}{k^{۲} \div k}=\frac{۱}{k}$ و چون $k \in M$ و $x \in \mathbb{Z}$ است، پس باید از بین اعضای مجموعهٔ M، عضوهایی را انتخاب کنیم که معکوس آنها نیز عدد صحیح باشند:

$$-\frac{۱}{۳} \notin \mathbb{Z}, -\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}, -\frac{۱}{۱} \in \mathbb{Z}, \frac{۱}{۱} \in \mathbb{Z}, \frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z}, \frac{۱}{۳} \notin \mathbb{Z}$$

بنابراین $A=\{-۱, +۱\}$ و دارای ۲ عضو است.

---

۸۷ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه $k \in \mathbb{N}$ و $k \leq ۶$ می‌باشد، پس k برابر عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌باشد. حالا با جایگذاری این مقادیر به جای k در عبارت $\frac{۲^{k}}{k^{۲}}$ عضوهای مجموعهٔ A را تعیین می‌کنیم.

$$A=\{\frac{۲^{۱}}{۱^{۲}}, \frac{۲^{۲}}{۲^{۲}}, \frac{۲^{۳}}{۳^{۲}}, \frac{۲^{۴}}{۴^{۲}}, \frac{۲^{۵}}{۵^{۲}}, \frac{۲^{۶}}{۶^{۲}}\}$$

$$=\{\frac{۲}{۱}, \frac{۴}{۴}, \frac{۸}{۹}, \frac{۱۶}{۱۶}, \frac{۳۲}{۲۵}, \frac{۶۴}{۳۶}\}=\{۲, ۱, \frac{۸}{۹}, ۱, \frac{۳۲}{۲۵}, \frac{۱۶}{۹}\}$$

$$=\{۲, ۱, \frac{۸}{۹}, \frac{۳۲}{۲۵}, \frac{۱۶}{۹}\} \Rightarrow n(A)=۵$$

---

۸۸ گزینهٔ «۳»

در بین اعداد صحیح اگر عددهای ۲، ۱، ۰، ۱- و ۲- را به توان ۴ برسانیم مقدار حاصل کمتر از ۱۷ خواهد شد.

بنابراین: $A=\{(-۲)^{۲}, (-۱)^{۲}, ۰^{۲}, ۱^{۲}, ۲^{۲}\}=\{۴, ۱, ۰\}$

که این مجموعه دارای $۲^{۳}$ یعنی ۸ زیرمجموعه می‌باشد که از این تعداد فقط یک زیرمجموعه تهی و بقیهٔ آنها یعنی ۷ زیرمجموعهٔ دیگر ناتهی هستند.

---

۸۹ گزینهٔ «۴»

$$A=\{۲^{x-۱} \mid x \in \mathbb{N}, x<۸\}=\{۲^{۱-۱}, ۲^{۲-۱}, ۲^{۳-۱}, \dots, ۲^{۷-۱}\}$$

$$=\{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴\}$$

$$B=\{۲^{۷-x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۷\}=\{۲^{۷-۱}, ۲^{۷-۲}, \dots, ۲^{۷-۷}\}$$

$$=\{۶۴, ۳۲, ۱۶, ۸, ۴, ۲, ۱\}$$

$$C=\{۲^{x} \mid x \in W, x<۷\}=\{۲^{۰}, ۲^{۱}, \dots, ۲^{۶}\}$$

$$=\{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴\}$$

$$D=\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۶۴}{x} \in \mathbb{N}\}=\{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴\}$$

هر چهار مجموعه دارای عضوهای ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و ۶۴ است.

(جابه‌جایی عضوها اهمیت ندارد.)

۹۰ گزینهٔ «۴»

■ مجموعه A شامل بی‌شمار عدد گویا از $\frac{۱۳۹۹}{۱۳۹۲}$ تا $\frac{۹}{۲}$ هست و با مجموعه داده‌شده برابر نیست.

■ در مجموعه B عضوهایی مانند $\frac{۹}{۲}$، $\frac{۹}{۳}$، $\frac{۹}{۴}$ و ... و $\frac{۹}{۱۳۹۲}$ وجود دارد که فقط $\frac{۹}{۲}$ در مجموعه داده‌شده است، بنابراین با مجموعه داده‌شده برابر نیست.

■ مجموعه C عضوی مانند $\frac{۱۳۹۹+۹}{۱۳۹۹+۲}$ دارد که در مجموعه داده‌شده نیست.

---

۹۱ گزینهٔ «۴»

$$\{(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}} \times n \mid \overbrace{n \in \mathbb{W}, n \leq ۵}^{n=۰,۱,۲,۳,۴,۵}\}$$

$$= \{(-۱)^{\frac{۰\times۱}{۲}} \times ۰, (-۱)^{\frac{۱\times۲}{۲}} \times ۱, (-۱)^{\frac{۲\times۳}{۲}} \times ۲, (-۱)^{\frac{۳\times۴}{۲}} \times ۳,$$

$$(-۱)^{\frac{۴\times۵}{۲}} \times ۴, (-۱)^{\frac{۵\times۶}{۲}} \times ۵\} = \{۰, -۱, -۲, ۳, ۴, -۵\}$$

---

۹۲ گزینهٔ «۲»؛ مجموعه $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < ۱۰\}$ شامل هر عدد حقیقی کمتر از ۱۰ می‌باشد و رادیکال اعداد نامنفی آن به عنوان عضوهای مجموعه A قرار می‌گیرند. بنابراین مجموعهٔ A شامل اعداد حقیقی از ۰ تا کمتر از $\sqrt{۱۰}$ می‌شود که در بین آنها چهار عضو صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ وجود دارد.

---

۹۳ گزینهٔ «۱»

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$$

$$B = \{ab \mid \{a, b\} \subseteq A, a \neq b\}$$

$$= \{۱\times۳, ۱\times۵, ۱\times۷, ۱\times۹, ۳\times۵, ۳\times۷, ۳\times۹, ۵\times۷, ۵\times۹, ۷\times۹\}$$

بنابراین $n(B) = ۱۰$ است.

---

۹۴ گزینهٔ «۲»

برای اینکه $-۲۳ \in A$ باشد یعنی $۳x + n = -۲۳$، می‌توان $x = -۸$ و $n = ۱$ را در نظر گرفت، پس مجموعه A به صورت $A = \{۳x+۱ \mid x \in \mathbb{Z}\}$ خواهد بود؛ با توجه به $\{a, b\} \subseteq A$ نتیجه می‌گیریم که هر دو عدد به صورت $۳x+۱$ خواهند بود مثلاً $a = ۳k+۱$ و $b = ۳t+۱$ پس داریم:

$$a + b = ۳k + ۱ + ۳t + ۱ = ۳(k + t) + ۲$$

یعنی $a + b$ برابر عددی صحیح است که از مضرب ۳، دو واحد بیشتر باشد.

در مجموعه (آ) عدد ۱۳۹۵ به صورت مضرب ۳ و عددهای ۱۴۳۸ و ۲۰۱۷ از مضرب ۳، یک واحد بیشتر هستند، اما در مجموعه (ب) همه عددها از مضرب ۳، دو واحد بیشتر هستند:

$$۱۳۵۸ = ۳\times۴۵۲ + ۲, ۱۳۸۸ = ۳\times۴۶۲ + ۲, ۱۳۳۴ = ۳\times۴۴۴ + ۲$$

---

۹۵ گزینهٔ «۲»

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{۱۶}{x} \in \mathbb{N}\} = \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\} \Rightarrow n = ۵$$

زیر مجموعه‌های ۲عضوی یا ۳عضوی مجموعه داده‌شده، طولانی‌ترین پاد زنجیر خواهد بود.

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی} = \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰$$

---

۹۶ گزینهٔ «۲»

$$A = \{n^۲ \mid n \in \mathbb{N}\} = \{۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, \ldots\} = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{۱۸۹}{x} \in \mathbb{N}\} = \{۱, ۳, ۷, ۹, ۲۱, ۲۷, ۶۳, ۱۸۹\}$$

$$C = \{۲k - ۷ \mid k \in \mathbb{N}, ۱۰ \leq k \leq ۹۰\}$$

$$= \{۲(۱۰) - ۷, ۲(۱۱) - ۷, \ldots, ۲(۹۰) - ۷\} = \{۱۳, ۱۵, ۱۷, \ldots, ۱۷۳\}$$

با توجه به نمایش‌های بالا، هر سه مجموعه شرط‌های اول و دوم را دارند اما شرط سوم فقط در مجموعه‌های A و C برقرار است.

می‌دانیم هر دو عدد متوالی دارای ب.م.م یک هستند پس مربع‌های آنها نیز دارای ب.م.م یک خواهند بود (مجموعه A شرط سوم را دارد و جذاب است) همچنین می‌دانیم هر دو عدد متوالی فرد دارای ب.م.م یک هستند (مجموعه C نیز جذاب خواهد بود)؛ اما در مجموعه B مثلاً $(۹, ۲۱) = ۳$ است.

---

۹۷ گزینهٔ «۱»؛ مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم، سپس اشتراک دو مجموعه را می‌نویسیم:

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}, B = \{۱, ۲, ۷, ۱۴\} \Rightarrow A \cap B = \{۱, ۲\}$$

---

۹۸ گزینهٔ «۲»

$$\{a, \varnothing\} \cup \{\{\{\varnothing\}, \{a\}, a\}\} = \{a, \varnothing, \{\{\varnothing\}, \{a\}, a\}\}$$

پس اجتماع دو مجموعه دارای ۳ عضو می‌باشد، در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۳$ یعنی ۸ زیرمجموعه است.

---

۹۹ گزینهٔ «۱»

عضوهای مجموعهٔ B، عددهای طبیعی هستند که از مضرب‌های ۳، یک واحد بیشتر می‌باشند، بنابراین:

$$B = \{۳(۱)+۱, ۳(۲)+۱, ۳(۳)+۱, \ldots\} = \{۴, ۷, ۱۰, \ldots\}$$

$$\{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۰\} \cap \{۴, ۷, ۱۰, \ldots\} = \{۴, ۷, ۱۰, \ldots, ۲۸\}$$

$$n(A \cap B) = \frac{۲۸ - ۴}{۳} + ۱ = ۹$$

---

۱۰۰ گزینهٔ «۴»

۳ و ۵ عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B هستند، بنابراین:

$$A \cap B = \{۳, ۵\}$$

---

۱۰۱ گزینهٔ «۴»

با توجه به مجموعه‌های $A = \{۴, ۵, a\}$ و $B = \{۱, b, ۵, ۷\}$ داریم:

$$A \cup B = \{۴, ۵, a, ۱, b, ۵, ۷\} = \{۴, ۵, ۱, ۷, a, b\}$$

از طرفی دیگر در صورت مسئله بیان شده که $A \cup B = \{۵, ۷, ۱, ۲, ۶, c\}$ بنابراین:

$$\{\textcircled{۴}, ۵, ۱, ۷, \textcircled{a, b}\} = \{۵, ۷, ۱, \textcircled{۲, ۶}, \textcircled{c}\}$$

$$\Rightarrow c = ۴, a + b = ۲ + ۶ = ۸ \Rightarrow a + b + c = ۸ + ۴ = ۱۲$$